

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Física Gleb Wataghin

Emaranhamento e Caos em um Sistema de Dois Spins

Fabiano Kenji Nohama
Aluno

Kyoko Furuya
Orientadora

Suporte Financeiro:
FAPESP

26 de Fevereiro de 2002

À minha família e aos meus amigos

Agradecimentos

À Profa. Kyoko Furuya pela orientação

Aos colegas do grupo de pesquisa

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)
pelo apoio financeiro

Resumo

Neste projeto estudamos um sistema de dois spins sob uma interação do tipo Heisenberg anisotrópico e a inclusão de dois campos magnéticos uniformes atuando em spins diferentes, onde procuramos relacionar a descoerência rápida no sistema quântico à presença de caos no sistema clássico.

Para fazer esta associação utilizamos no regime semiclássico a representação de estados coerentes para obter a dinâmica do sistema de spins clássicos e relacionar cada ponto do espaço de fase a um pacote coerente que esteja centrado nele. Para descrever o processo de descoerência observamos a evolução temporal do defeito de idempotência, que nos indica quantitativamente a perda de coerência.

Com isso notamos que o tempo de descoerência para pacotes de onda centrados em regiões de regime caótico é menor do que se eles estivessem centrados em regiões de regime regular. Além disso, as curvas do gráfico do defeito de idempotência para o caso caótico apresentam a tempos longos um patamar mais elevado e flutuações em torno da média com menor amplitude que o caso regular.

Também estudamos a evolução temporal dos elementos de matriz do operador densidade reduzido referente ao spin de menor tamanho, onde observamos que os pacotes centrados em regiões caóticas têm uma tendência de se espalhar no espaço de fase em oposição ao caso regular, onde o pacote tenta manter sua forma dentro da região definida pelo toro.

Abstract

In this project we have studied a two spin system under an anisotropic Heisenberg interaction and external magnetic fields acting on each spin separately. We have been able to relate fast decoherence of a quantum subsystem with the presence of chaos in the corresponding classical system.

Such an association has been done making use of the coherent state representation of the Hamiltonian operator in the semiclassical regime. Each point in the phase space can be connected to a coherent wave packet centered there. In order to observe the decoherence process, we have followed the temporal evolution of the idempotency defect.

With this procedure, we have noted that the entanglement time for those packets centered at a point with chaotic vicinities is less than those with regular vicinities. Another aspect observed is that the idempotency defect reaches a plateau (at long times) that is higher in the chaotic cases as compared to the regular ones.

Also, the time evolution of the reduced density matrix showed that the population of those packets located at the chaotic regions tends to become equally distributed, whereas those packets located at regular regions remains unequally distributed (the packets try to maintain the populations inside the region defined by the tori).

Conteúdo

Introdução	1
1 Sistema de Dois Spins Quânticos Interagentes	3
1.1 Emaranhamento de Subsistemas Quânticos	3
1.1.1 Estado do tipo produto tensorial	4
1.1.2 Estado Emaranhado	4
1.2 Operador Densidade	5
1.2.1 Caso Puro	6
1.2.2 Mistura Estatística	7
1.2.3 Populações e Coerências	8
1.3 Descrição de uma parte de um Sistema Físico utilizando o Operador Densidade	10
1.4 Exemplos	12
2 Dinâmica Clássica para um Sistema de Dois Spins Intera- gentes	17
2.1 Considerações Gerais	17
2.2 Limite Clássico para a Hamiltoniana de Heisenberg	19
2.2.1 Princípio Variacional na Mecânica Quântica	20
2.2.2 Estados Coerentes	22
2.2.3 Dinâmica Semiclássica na Representação de Estados Coerentes	23
2.2.4 Dinâmica Clássica para Dois Spins sob a Interação de Heisenberg	25
2.3 Exemplos	30
3 Influência de Caos sobre a Dinâmica de Emaranhamento	32
3.1 Spins Iguais	32

3.2	Spins Diferentes	40
3.2.1	Populações e Coerências	45
3.3	Caso Integrável (Spins Iguais)	49
4	Conclusões	54
	Apêndice	56
	Bibliografia	58

Introdução

Nesta última década ocorreram vários estudos para caracterização de caos em sistemas quânticos. Muitos destes esforços estão concentrados na associação de fenômenos em sistemas quânticos às características da dinâmica do sistema clássico correspondente, de onde podemos observar efeitos na mecânica quântica que estão ligados à presença ou ausência de caos no sistema clássico.

Podemos citar como exemplo o tunelamento auxiliado por caos [1], fenômeno no qual a presença de regiões caóticas entre duas ilhas regulares aumenta a taxa de tunelamento dinâmico entre elas. Este fenômeno já foi inclusive observado experimentalmente [2].

Outro exemplo importante está na estatística de níveis, onde observou-se que, para sistemas quânticos cujo análogo clássico é integrável, as flutuações nos níveis do espectro obedecem a estatística de Poisson [3]. No entanto, para sistemas quânticos cujo análogo clássico é caótico, estas flutuações são descritas com mais precisão pela flutuação espectral dada por um ensemble de matrizes aleatórias ortogonais Gaussianas [4], [5].

O fenômeno em particular que estudaremos é o da descoerência rápida sob interação de subsistemas no sistema quântico, que ocorre quando o estado inicial do sistema está centrado em regiões caóticas do espaço de fase clássico no regime semiclássico.

Zurek e Paz [6] propuseram a ocorrência deste efeito, ou seja, que a taxa de produção de entropia de um sistema quântico aberto é um bom indicador para o comportamento dinâmico de seu correspondente clássico (neste caso a presença ou ausência de caos).

Esta proposta foi confirmada para o caso do modelo de Jaynes-Cummings de N -átomos, onde o efeito de descoerência rápida de um dos subsistemas devido a caos foi observado numericamente [7].

Nosso objetivo é observar se este fenômeno ocorre em um sistema de dois spins interagentes. Pretendemos desta forma comprovar a proposta de Zurek e Paz para a interação entre subsistemas de espaço de Hilbert finito. A vantagem neste tipo de sistema está no fato de que não é necessário fazer um truncamento no número de níveis no espectro, como teria que ser feito no caso de sistema com espaços de Hilbert infinito. Logo, os resultados que serão obtidos numericamente neste trabalho não sofrerão este tipo de imprecisão.

A interação proposta consiste de um sistema de dois spins S_1 e S_2 ligados

através de uma interação do tipo Heisenberg. Pretendemos abordar o caso anisotrópico deste tipo de interação, assim como a inclusão de um campo magnético externo.

Feingold e Peres[11], [12] fizeram um estudo semiclássico deste tipo de interação, na qual o sistema clássico apresenta caos. Neste tipo de sistema é possível obter casos nos quais o espaço de fase apresenta um regime misto de órbitas regulares e caóticas, que veremos ser de nosso interesse.

Como desejamos observar a influência do regime do espaço de fase clássico sobre a dinâmica de emaranhamento do sistema quântico, devemos observar o comportamento do sistema nos dois limites (clássico e quântico).

No capítulo 1 vamos apresentar o método da matriz densidade utilizado para descrever a dinâmica de emaranhamento entre os dois spins. O objetivo é observar a evolução temporal de uma grandeza que indica quantitativamente o quanto os dois spins estão emaranhados.

No capítulo 2 apresentaremos as propriedades do regime semiclássico do sistema, de onde faremos a conexão entre os limites clássico e quântico no regime semiclássico do sistema.

Por fim, no capítulo 3 utilizaremos o que foi apresentado nos dois capítulos anteriores para associar o fenômeno de descoerência rápida de um dos subsistemas do sistema quântico à presença de caos no sistema clássico. Também observamos as diferenças no comportamento da matriz densidade reduzida do subsistema quântico, no regime de spins grandes (semiclássico), quando o estado inicial está relacionado a uma região caótica ou regular no espaço de fase.

Capítulo 1

Sistema de Dois Spins Quânticos Interagentes

No sistema quântico, a Hamiltoniana do sistema é dada por:

$$H = a_0 S_{1x} S_{2x} + a_1 S_{1y} S_{2y} + a_2 S_{1z} S_{2z} + g_1 \hbar S_2 S_{1z} + g_2 \hbar S_1 S_{2z} \quad (1.1)$$

onde a_0 , a_1 e a_2 são os coeficientes da interação de Heisenberg e os coeficientes $g_1 \hbar S_2$ e $g_2 \hbar S_1$ são os termos proporcionais a dois campos magnéticos uniformes e externos, cada um atuando em um spin e que devem ser ajustados conforme o tamanho dos spins por motivos que vão ficar claros posteriormente.

Neste caso, desejamos observar a dinâmica de emaranhamento entre os dois spins, em particular no regime semiclássico onde fazemos uma associação com a dinâmica caótica ou regular clássica que será apresentada no Cap. 2.

Com isso, verificaremos a ocorrência de um emaranhamento rápido quando o estado inicial está concentrado no espaço de fase na região classicamente caótica, e lenta no caso regular.

1.1 Emaranhamento de Subsistemas Quânticos

Como já foi dito na Introdução, o espaço global que estudamos é formado pelo produto tensorial dos espaços de subsistemas (no nosso caso dois) e sua base é tomada como o produto tensorial entre as bases do subsistemas. No

entanto, isto não implica que todo estado global do sistema possa ser descrito como produto tensorial de estados de cada subsistema.

Um estado que não pode ser separado em um produto tensorial é conhecido como estado emaranhado. A seguir discutiremos o operador densidade reduzido de um dos subsistemas e também uma quantidade que possa medir o grau de emaranhamento ao longo da interação entre os dois subsistemas.

1.1.1 Estado do tipo produto tensorial

Vamos ilustrar um caso simples: considere um sistema composto por duas partes $\{1\}$ e $\{2\}$. Logo, o espaço global ε é formado pelo produto tensorial dos respectivos espaços de estados das partes $\{1\}$ e $\{2\}$ ($\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$). Suponha um estado $|\Psi\rangle$ pertencente a ε e que possa ser separado em um produto tensorial:

$$|\Psi\rangle = |\phi(1)\rangle \otimes |\alpha(2)\rangle = |\phi(1)\alpha(2)\rangle \quad (1.2)$$

Para sabermos a possibilidade de obtermos o resultado a_n na medida do observável $A(1)$ no subsistema $\{1\}$, utilizamos o projetor sobre o autossobespaço de a_n em $\{1\}$ $P_n(1) \otimes \mathbf{1}(2)$. Desta forma, temos:

$$P(a_n) = \langle \phi(1)\alpha(2) | P_n(1) \otimes \mathbf{1}(2) | \phi(1)\alpha(2) \rangle = \langle \phi(1) | P_n(1) | \phi(1) \rangle \quad (1.3)$$

Onde devemos observar que é o mesmo resultado que seria obtido se não houvesse o subsistema $\{2\}$. Na verdade, podemos dizer que, se um estado é do tipo produto tensorial, as medidas sobre uma parte do sistema **independem** do estado das outras partes que compõem o sistema.

1.1.2 Estado Emaranhado

Quando um sistema se encontra no estado emaranhado, não se pode utilizar o mesmo procedimento da seção 1.1.1, uma vez que não se pode separar o vetor de estado em $|\phi(1)\rangle$ e $|\alpha(2)\rangle$. Tal situação indica que as previsões da medida sobre uma parte do sistema dependem dos estados das outras partes

que formam o sistema, ou seja, os subsistemas que formam o sistema global estão correlacionados.

Em casos nos quais existe uma interação entre os subsistemas, a evolução temporal pode levar um estado do tipo produto a um estado emaranhado. Observando apenas o estado de um dos subsistemas, dizemos que o subsistema em questão sofreu um processo de perda de coerência (ou descoerência), pois ele não pode ser mais descrito isoladamente das outras partes do sistema.

O efeito de descoerência é estudado no processo de medida de sistemas quânticos macroscópicos, onde a descoerência do sistema devido a interação com o ambiente leva um estado inicialmente em superposição linear a uma mistura estatística [13]. Isso dificulta a observação de fenômenos devido a superposição de estados conforme nos aproximamos do limite clássico.

Este efeito também é estudado na computação quântica, pois se trata de uma das principais fontes de erro nas operações de um computador quântico. O principal objetivo neste caso é manter a coerência do estado do sistema [14].

Estaremos particularmente interessados em observar a dinâmica do processo de descoerência e, para fazê-lo, necessitamos do formalismo do operador densidade.

1.2 Operador Densidade

O formalismo do operador densidade foi elaborado na Mecânica Estatística Quântica[15], para resolver o problema de medição em um sistema quântico que se encontra em uma mistura estatística de estados. No entanto, tal formalismo tem grande utilidade no estudo da correlação entre subsistemas que compõem um sistema global.

Como no problema do emaranhamento o interesse maior é o segundo caso, utilizaremos este formalismo para sistemas que são descritos por um estado global puro.

No entanto, para se ter uma idéia clara sobre o operador densidade em sua forma mais geral, também englobaremos em nossa explicação o caso em que o sistema se encontra em uma mistura estatística de estados.

1.2.1 Caso Puro

Considere um sistema que se encontra em um estado bem definido $|\Psi(t)\rangle$, cuja representação na base ortonormal $\{|u_n\rangle\}$ é dada por:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |u_n\rangle. \quad (1.4)$$

O operador densidade para o caso puro é dado por:

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|. \quad (1.5)$$

Assim, podemos escrever seus elementos de matriz como:

$$\rho_{np}(t) = \langle u_n | \rho(t) | u_p \rangle = c_n(t) c_p^*(t). \quad (1.6)$$

Este operador é definido desta forma para que possa descrever informações do sistema em estudo. De fato, através do operador densidade podemos descrever:

Conservação de probabilidade: Considerando a normalização do estado em que o sistema se encontra, temos que:

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = \sum_n \rho_{nn}(t) = 1 \quad (1.7)$$

Logo, no formalismo do operador densidade, a conservação de probabilidade pode ser escrita como:

$$\text{Tr} \{ \rho(t) \} = 1. \quad (1.8)$$

Média de um observável A: Em função das componentes do estado do sistema $|\Psi(t)\rangle$, a média de um operador A é dado por:

$$\langle A \rangle(t) = \sum_{n,p} c_n^*(t) c_p(t) A_{np} = \sum_p \langle u_p | \rho \left[\sum_n |u_n\rangle \langle u_n| \right] A | u_p \rangle = \sum_p \langle u_p | \rho A | u_p \rangle. \quad (1.9)$$

Portanto, em função do operador densidade, temos que:

$$\langle A \rangle(t) = \text{Tr} \{ \rho A \}. \quad (1.10)$$

Evolução Temporal: Através da equação de Schrödinger e da definição do operador densidade, também podemos encontrar uma equação que determina a evolução temporal de $\rho(t)$:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho(t)]. \quad (1.11)$$

Esta equação é conhecida como **equação de Von Neumann**.

Distribuição de Probabilidade na Medida de um Observável A: Podemos escrever em função de $\rho(t)$ a probabilidade de obtermos o resultado a_n na medida do observável A, considerando que esta pode ser escrita como a média do projetor sobre o autosubespaço associado a a_n

$$P(a_n) = \langle P_n \rangle (t) = Tr \{ \rho P_n \}. \quad (1.12)$$

Particularmente para o caso puro, o operador densidade também satisfaz as propriedades:

$$\rho(t) = \rho^\dagger(t) \quad (1.13)$$

$$\rho^2(t) = \rho(t) \quad (1.14)$$

$$Tr \{ \rho^2(t) \} = 1. \quad (1.15)$$

Logo veremos que as duas últimas propriedades não são satisfeitas no caso mais geral.

1.2.2 Mistura Estatística

Em uma mistura estatística de estados o sistema tem probabilidade p_1 de estar no estado $|\Psi_1\rangle$, p_2 de estar no estado $|\Psi_2\rangle$, ..., p_k de estar no estado $|\Psi_k\rangle$, ..., e assim por diante. Os valores de $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$ são arbitrários desde que satisfaçam:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq p_1, p_2, \dots, p_k, \dots \leq 1, \\ \sum_k p_k = 1 \end{array} \right. \quad (1.16)$$

O caso de um sistema no estado puro é um caso particular de mistura estatística quando uma das probabilidades acima for 1 (e as outras, consequentemente nulas).

O operador densidade para um sistema em mistura estatística é definido por:

$$\rho = \sum_k p_k \rho_k \quad (1.17)$$

onde ρ_k é o operador densidade referente ao estado puro $|\Psi_k\rangle$:

$$\rho_k = |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|. \quad (1.18)$$

Pode-se mostrar que esta definição para o operador densidade satisfaz as relações de (1.8) a (1.13). No entanto, vemos que ele não é mais um projetor. Logo, **em geral**, devemos ter:

$$\rho^2 \neq \rho \quad (1.19)$$

e, consequentemente:

$$Tr \{ \rho^2 \} \neq 1 \quad (1.20)$$

A igualdade nas relações acima só ocorre quando o estado do sistema é um estado puro. Esta diferença entre os dois casos nos permitirá fazer a observação da perda de coerência do sistema.

1.2.3 Populações e Coerências

É interessante observar também o significado dos elementos de matriz do operador densidade.

Vamos considerar inicialmente os elementos da diagonal, que no caso mais geral (mistura estatística) têm a forma abaixo:

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k [\rho_k]_{nn} \quad (1.21)$$

Definindo $c_n^{(k)}$ como o coeficiente no elemento da base $|u_n\rangle$ do estado $|\Psi_k\rangle$:

$$c_n^{(k)} = \langle u_n | \Psi_k \rangle \quad (1.22)$$

Podemos rescrever este elemento de matriz como:

$$\rho_{nn} = \sum_k p_k |c_n^{(k)}|^2 \quad (1.23)$$

Mas $|c_n^{(k)}|^2$ representa a probabilidade de ocupação do nível no espectro correspondente a $|u_n\rangle$ caso o sistema estivesse no estado $|\Psi_k\rangle$. Como p_k representa a probabilidade de que o sistema esteja no estado $|\Psi_k\rangle$, podemos dizer que o elemento de matriz ρ_{nn} representa a probabilidade de ocupação do nível no espectro correspondente a $|u_n\rangle$ para o sistema em mistura estatística. Por esse motivo dizemos que o elemento de matriz ρ_{nn} representa a **população** do estado $|u_n\rangle$.

Vamos nos concentrar agora nos elementos não diagonais do operador densidade, que pode ser escrito como:

$$\rho_{np} = \sum_k p_k c_n^{(k)} (c_p^{(k)})^* \quad (1.24)$$

Observe agora que o termo $c_n^{(k)} (c_p^{(k)})^*$ está associado ao efeito de interferência entre os estados $|u_n\rangle$ e $|u_p\rangle$ quando o sistema se encontra no estado $|\Psi_k\rangle$. Assim podemos dizer que o elemento ρ_{np} representa a média desse efeito de interferência no sistema em mistura estatística.

Quando $\rho_{np} = 0$ significa que na média sobre os estados possíveis da mistura estatística não há correlações que produzam efeitos de interferência entre $|u_n\rangle$ e $|u_p\rangle$. Agora se $\rho_{np} \neq 0$, então existe coerência entre estes dois estados (ou correlações quânticas).

Os elementos de matriz não diagonais são então chamados de **coerências**.

Para o caso do sistema no estado puro, o significado das populações do operador densidade não é afetado. Mas para o caso das coerências deixamos de considerá-las como uma média e passam a representar o valor exato do termo de interferência.

1.3 Descrição de uma parte de um Sistema Físico utilizando o Operador Densidade

Nesta seção vamos nos restringir a sistemas físicos com dois graus de liberdade e inicialmente no estado puro. Voltemos ao exemplo da seção 1.1.1, onde temos dois sistemas $\{1\}$ e $\{2\}$ que formam o sistema global $\{1\} + \{2\}$ cujo espaço de estado ε é formado pelo produto tensorial dos espaços de estado de $\{1\}$ e $\{2\}$:

$$\varepsilon = \varepsilon_{(1)} \otimes \varepsilon_{(2)}. \quad (1.25)$$

Se escolhermos como bases de $\varepsilon_{(1)}$ e $\varepsilon_{(2)}$ os conjuntos $\{|u_n(1)\rangle\}$ e $\{|v_k(2)\rangle\}$ respectivamente, podemos escolher como base do sistema global o conjunto formado pelos kets $|u_n(1)v_k(2)\rangle$.

Sabemos que o operador densidade ρ do sistema global atua em ε . Agora pretendemos obter a partir de ρ um operador ρ_1 (ou ρ_2) que atue apenas em $\varepsilon_{(1)}$ (ou $\varepsilon_{(2)}$) e opere como identidade em $\varepsilon_{(2)}$ (ou $\varepsilon_{(1)}$), de tal forma que este operador nos permita fazer previsões sobre as medidas referentes exclusivamente a $\{1\}$ (ou $\{2\}$). Este procedimento é conhecido como traço parcial com relação a $\{2\}$ (ou $\{1\}$).

Considere o observável $A(1)$ que atua em $\varepsilon_{(1)}$ e $\tilde{A}(1) = A(1) \otimes \mathbf{1}(2)$ sua extensão em ε . Em termos de ρ , a média de $\tilde{A}(1)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}(1) \rangle &= \text{Tr} \left\{ \rho \tilde{A}(1) \right\} = \\ &= \sum_{n,k} \sum_{n',k'} \langle u_n(1)v_k(2) | \rho | u_{n'}(1)v_{k'}(2) \rangle \langle u_{n'}(1)v_{k'}(2) | A(1) \otimes \mathbf{1}(2) | u_n(1)v_k(2) \rangle = \\ &= \sum_{n,k,n',k'} \langle u_n(1)v_k(2) | \rho | u_{n'}(1)v_{k'}(2) \rangle \langle u_{n'}(1) | A(1) | u_n(1) \rangle \delta_{kk'} \end{aligned}$$

Logo temos:

$$\langle \tilde{A}(1) \rangle = \sum_{n,n'} \left[\sum_k \langle u_n(1)v_k(2) | \rho | u_{n'}(1)v_k(2) \rangle \right] \langle u_{n'}(1) | A(1) | u_n(1) \rangle \quad (1.26)$$

Definindo ρ_1 como um operador cujo elemento de matriz é dado por:

$$\langle u_n | \rho_1 | u_{n'} \rangle = \langle u_n(1) | \left(\sum_k \langle v_k(2) | \rho | v_k(2) \rangle \right) | u_{n'}(1) \rangle, \quad (1.27)$$

a média de $\tilde{A}(1)$ é:

$$\langle \tilde{A}(1) \rangle = Tr \{ \rho_1 A(1) \} \quad (1.28)$$

Logo, o valor médio de $\tilde{A}(1)$ pode ser calculado como se fosse isolado e ρ_1 fosse o operador densidade. Mas isto é apenas uma analogia, uma vez que o valor médio obtido é influenciado pela interação com o sistema $\{2\}$.

Por definição, ρ_1 é obtido através do traço parcial de ρ com relação a $\{2\}$. Logo:

$$\rho_1 = Tr_2 \{ \rho \} \quad (1.29)$$

cujos elementos de matriz são dados pela relação (1.27). Observe que através do traço parcial, eliminamos os graus de liberdades que não são de nosso interesse.

Analogamente, ρ_2 é dado por:

$$\rho_2 = Tr_1 \{ \rho \} \quad (1.30)$$

e seus elementos de matriz são:

$$\langle v_k | \rho_2 | v_{k'} \rangle = \langle v_k(2) | \left(\sum_n \langle u_n(1) | \rho | u_n(1) \rangle \right) | v_{k'}(2) \rangle \quad (1.31)$$

Quando ρ descreve um estado puro ($Tr \{ \rho^2 \} = 1$), nem sempre é verdade que ρ_1 e ρ_2 descrevam um operador densidade. Através das relações (1.27) e (1.31) podemos verificar que, em geral, os traços de ρ_1^2 e ρ_2^2 são diferentes de 1. Na verdade, a igualdade só é satisfeita quando os sistemas $\{1\}$ e $\{2\}$ não estiverem emaranhados. Isto reflete o fato de que o estado do subsistema é descrito como uma mistura estatística quando o estado global for um estado emaranhado. Nesta situação, o operador densidade reduzido passa a satisfazer as propriedades gerais dadas na seção 1.2.2.

Estes conceitos podem ser utilizados para estudar a correlação entre os sistemas $\{1\}$ e $\{2\}$. Um bom indicador quantitativo desta correlação é o defeito de idempotência (ou entropia linear reduzida) [16], que é definido como:

$$\delta(t) = 1 - \text{Tr}_1 \{ \rho_1^2 \} \quad (1.32)$$

Observe que $\delta(t) = 0$ somente quando $\text{Tr}_1 \{ \rho_1^2 \} = 1$, mas, como foi visto no último parágrafo, isto ocorre apenas quando não existe correlação entre $\{1\}$ e $\{2\}$. Portanto, o defeito de idempotência é nulo quando não existe correlação e maior que zero caso contrário.

Mas se escolhermos como estado inicial um estado do tipo produto no caso da interação dada por (1.1), esperamos que $\delta(t)$ inicialmente seja nulo mas assuma valores diferentes de zero em sua evolução temporal devido à interação.

A taxa de crescimento desta grandeza nos indica a taxa com que o subsistema $\{1\}$ perde coerência devido à interação com o segundo subsistema.

Uma outra maneira de observar a correlação é verificando se ρ é igual ao operador ρ' dado por:

$$\rho' = \rho_1 \otimes \rho_2. \quad (1.33)$$

Pode-se demonstrar que a igualdade só é satisfeita quando a correlação não existe.

1.4 Exemplos

Apresentamos a seguir alguns exemplos simples para ilustrar como obter, conhecendo a interação e conhecendo o estado inicial, o defeito de idempotência em função do tempo.

Em todos estes exemplos consideramos a interação de Heisenberg isotrópica sem o termo do campo magnético externo. Em outras palavras, utilizamos a interação representada pelo operador Hamiltoniano:

$$H = a \vec{S}_1 \vec{S}_2 \quad (1.34)$$

onde consideramos dois exemplos:

Exemplo 1:

Consideremos dois spins $1/2$, cujo estado inicial é dado por:

$$|\psi(0)\rangle = |+, -\rangle \quad (1.35)$$

A evolução temporal, considerando a Hamiltoniana dada por 1.34, nos leva a:

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) |+-\rangle - i \sin\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) |-+\rangle \quad (1.36)$$

Assim, considerando a base dada por $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$, podemos determinar a forma matricial dos seguintes operadores:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) & \frac{i}{2}\sin(a\hbar t) & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2}\sin(a\hbar t) & \sin^2\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1(t) = \text{Tr}_2 \{\rho(t)\} = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) & 0 \\ 0 & \sin^2\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(t) = \text{Tr}_1 \{\rho(t)\} = \begin{pmatrix} \sin^2\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) & 0 \\ 0 & \cos^2\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

E desta forma, obtemos o defeito de idempotência:

$$\delta(t) = 1 - \text{Tr} \{\rho_1^2(t)\} = 2\sin^2\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) \cos^2\left(\frac{a\hbar}{2}t\right) = \frac{1}{2}\sin^2(a\hbar t) \quad (1.37)$$

Então, o gráfico de $\delta(t)$ tem a forma da figura 1.1, para $a = 1$ e $\hbar = 1$.

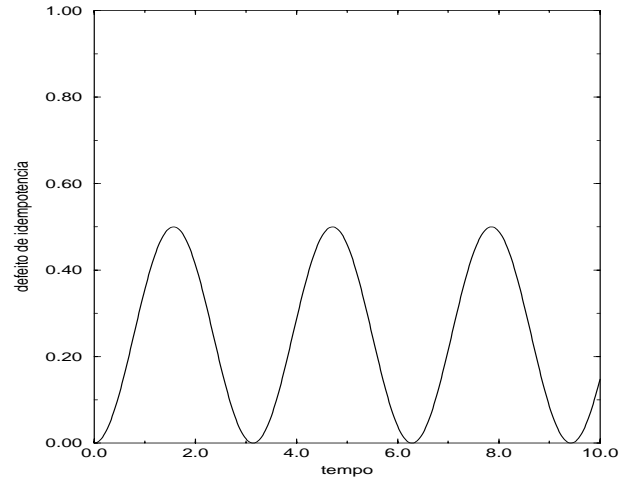


Figura 1.1: gráfico do defeito de idempotência em função do tempo para o caso do exemplo 1. Consideramos aqui $a = 1$ e $\hbar = 1$.

Temos que o defeito de idempotência é nulo para $t_n = \frac{n\pi}{ah}$ (n inteiro). Observe que nestes valores de tempo, a igualdade $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ é satisfeita, o que confirma que não existe correlação entre os dois spins quando $\delta(t_n) = 0$.

Exemplo 2:

Consideremos agora a interação entre um spin 1 com um spin 1/2. Tome-mos como estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = |0, +\rangle \quad (1.38)$$

Agora o espaço de estados é de dimensão 6, que representamos pela base $|1+\rangle, |1-\rangle, |0+\rangle, |0-\rangle, |-1+\rangle, |-1-\rangle$. E a evolução temporal nos leva a:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{3} \left[\left(2e^{-i\frac{a\hbar}{2}t} + e^{ia\hbar t} \right) |0+\rangle + \sqrt{2} \left(e^{-i\frac{a\hbar}{2}t} - e^{ia\hbar t} \right) |1-\rangle \right] \quad (1.39)$$

E, da mesma forma que no exemplo anterior, obtemos as matrizes:

$$\rho(t) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 - 4\cos\left(\frac{3}{2}a\hbar t\right) & \sqrt{2} \left[1 - 2i\sin\left(\frac{3}{2}a\hbar t\right) - e^{\frac{3}{2}ia\hbar t} \right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \left[1 + 2i\sin\left(\frac{3}{2}a\hbar t\right) - e^{-\frac{3}{2}ia\hbar t} \right] & 5 + 4\cos\left(\frac{3}{2}a\hbar t\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1(t) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 - 4\cos\left(\frac{3}{2}a\hbar t\right) & 0 & 0 \\ 0 & 5 + 4\cos\left(\frac{3}{2}a\hbar t\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(t) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 + 4\cos\left(\frac{3}{2}a\hbar t\right) & 0 \\ 0 & 4 - 4\cos\left(\frac{3}{2}a\hbar t\right) \end{pmatrix}$$

Assim, o defeito de idempotência é dado por:

$$\delta(t) = \frac{16}{81} \left[\sin^2\left(\frac{3}{4}a\hbar t\right) + 2\sin^2\left(\frac{3}{2}a\hbar t\right) \right] \quad (1.40)$$

Desta vez, o gráfico para $\delta(t)$ tem a forma da figura 1.2 (onde consideramos $a = 1$ e $\hbar = 1$).

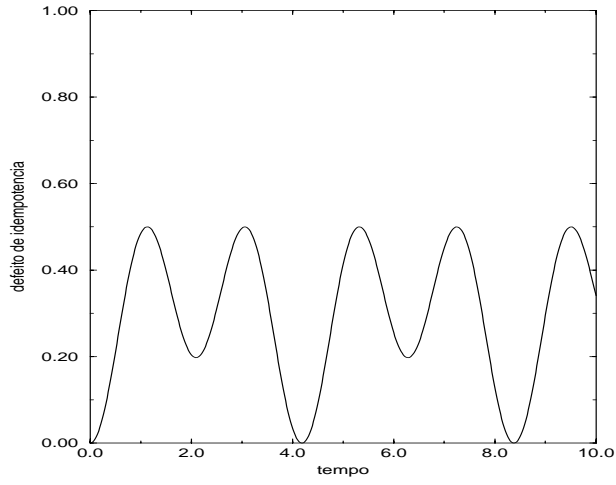


Figura 1.2: gráfico do defeito de idempotência em função do tempo para o caso do exemplo 2. Consideramos aqui $a = 1$ e $\hbar = 1$

Os zeros do defeito de idempotência são os instantes de tempo $t_n = \frac{4n\pi}{3a\hbar}$. Pode-se verificar as mesmas observações feitas anteriormente sobre as relações entre ρ e $\rho_1 \otimes \rho_2$ nestes instantes de tempo. Note que ao aumentarmos o número de estados do subsistema levou ao surgimento de duas frequências ($\frac{3}{2}a\hbar$ e $\frac{3}{4}a\hbar$).

Capítulo 2

Dinâmica Clássica para um Sistema de Dois Spins Interagentes

Em analogia ao sistema de dois spins quânticos podemos elaborar um sistema de dois spins clássicos regido pelo formalismo da mecânica clássica. Além disso este sistema deve ser o limite do sistema de spins quânticos quando $\hbar \rightarrow 0$ e $|\vec{S}| \rightarrow \infty$.

Na próxima seção apresentaremos considerações gerais sobre este sistema obtidas através da analogia com o sistema quântico. Em seguida daremos uma idéia da instrumentação utilizada para obtê-lo como o limite clássico do sistema quântico.

2.1 Considerações Gerais

Consideremos o sistema de dois spins definidos pelos números quânticos S_1 e S_2 que interagem sob influência da Hamiltoniana H . Neste sistema temos os operadores S_l^α da componente do spin l ($l = 1, 2$) na direção α ($\alpha = x, y, z$).

Sabemos que o sistema de spins quântico é regido pelas equações:

$$\frac{dS_l^\alpha}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [S_l^\alpha, H] \quad (2.1)$$

$$\left[S_l^\alpha, S_k^\beta \right] = i\hbar \delta_{lk} \sum_{\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} S_l^\gamma \quad (2.2)$$

$$\langle S_k, m_k | \left(\vec{S}_l \right)^2 | S_l, m_l \rangle = S_l (S_l + 1) \hbar^2 \delta_{lk} \delta_{m_l m_k}. \quad (2.3)$$

Analogamente, podemos definir os spins clássicos como vetores $\vec{S}_l(q_l, p_l) = (\mathcal{S}_l^x, \mathcal{S}_l^y, \mathcal{S}_l^z)$ ($l = 1, 2$) cujo módulo é correspondente aos autovalores de \vec{S}^2 :

$$\left| \vec{S}_l \right| \rightarrow \hbar \sqrt{S_l (S_l + 1)} \quad (2.4)$$

e (q_l, p_l) são as coordenadas generalizadas para descrever o sistema clássico.

O sistema clássico também deve ter uma função geradora \mathcal{H} (função energia) responsável pela evolução temporal em correspondência à Hamiltoniana do sistema quântico:

$$H(\vec{S}_1, \vec{S}_2) \rightarrow \mathcal{H}(\vec{\mathcal{S}}_1, \vec{\mathcal{S}}_2). \quad (2.5)$$

Finalmente, utilizamos os parênteses de Poisson em correspondência ao comutador quântico. Em função das coordenadas generalizadas (q_l, p_l) , definimos os parênteses de Poisson entre duas funções $A(q_l, p_l)$ e $B(q_l, p_l)$ como:

$$\{A, B\} = \sum_l \left(\frac{\partial A}{\partial q_l} \frac{\partial B}{\partial p_l} - \frac{\partial A}{\partial p_l} \frac{\partial B}{\partial q_l} \right). \quad (2.6)$$

E desta definição, obtemos o análogo clássico de (2.2):

$$\left\{ \mathcal{S}_l^\alpha, \mathcal{S}_k^\beta \right\} = \delta_{lk} \sum_{\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathcal{S}_l^\gamma. \quad (2.7)$$

Portanto, em analogia às relações da mecânica quântica dadas no início desta seção, definimos que um sistema de dois spins clássico deve ter uma interação dada por uma Hamiltoniana do tipo:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\vec{\mathcal{S}}_1, \vec{\mathcal{S}}_2). \quad (2.8)$$

E sua evolução temporal deve ser dada por:

$$\frac{d\mathcal{S}_l^\alpha}{dt} = \{ \mathcal{S}_l^\alpha, \mathcal{H} \}. \quad (2.9)$$

Agora, se as coordenadas generalizadas são variáveis canonicamente conjugadas, esta última relação nos leva às equações de Hamilton:

$$\dot{q}_l = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_l} \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_l}. \quad (2.10)$$

O que foi apresentado até agora foram propriedades gerais do sistema de spins clássicos obtidos por analogia e seguindo o formalismo da mecânica clássica. Isto significa que qualquer sistema obtido como um limite clássico do sistema de spins quânticos deve satisfazer estas propriedades para ser considerado um sistema de spins clássico.

2.2 Limite Clássico para a Hamiltoniana de Heisenberg

O limite clássico da Hamiltoniana de Heisenberg deve ser descrito através de uma função \mathcal{H} . Suas propriedades devem ser consistentes com as que foram apresentadas na seção anterior.

Esperamos que a interação de Heisenberg mais os termos de campo externo tenham a seguinte forma no limite clássico:

$$\mathcal{H} = a_0 \mathcal{S}_{1x} \mathcal{S}_{2x} + a_1 \mathcal{S}_{1y} \mathcal{S}_{2y} + a_2 \mathcal{S}_{1z} \mathcal{S}_{2z} + g_1 S_2 \mathcal{S}_{1z} + g_2 S_1 \mathcal{S}_{2z}. \quad (2.11)$$

O método para obter esta Hamiltoniana como o limite clássico do Hamiltoniano do sistema quântico consiste em definir um novo operador [17]:

$$\vec{s}_l = \frac{\vec{S}_l}{\sqrt{S_l(S_l + 1)}}. \quad (2.12)$$

e tomar o limite $S_l \rightarrow \infty$. Assim as relações de comutação entre as componentes de um dado spin tomam a forma:

$$[s_l^\alpha, s_l^\beta] = i\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\hbar s_l^\gamma}{\sqrt{S_l(S_l + 1)}}. \quad (2.13)$$

Observe que este comutador é nulo no limite $S_l \rightarrow \infty$, sendo consistente com o que é esperado quando um sistema está alcançando o limite clássico.

Então podemos reescrever (1.1) (no caso $S_1 = S_2 = S$) como:

$$H = S(S+1)[a_0 s_{1x} s_{2x} + a_1 s_{1y} s_{2y} + a_2 s_{1z} s_{2z} + a_3(s_{1z} + s_{2z})]. \quad (2.14)$$

para $g_1 \hbar S_2 = g_2 \hbar S_1 = a_3$

No limite $S \rightarrow \infty$, podemos obter \mathcal{H} a partir de H tomando as componentes s_i^α como variáveis clássicas. Devemos notar que, ao tomarmos simultaneamente os limites $S \rightarrow \infty$ e $\hbar \rightarrow 0$ estaremos fazendo a passagem de um espectro de energia discreto para um espectro de energia contínuo.

Portanto, o limite clássico é dado por:

$$\hbar \rightarrow 0 \quad e \quad S_l \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

sujeitos à condição:

$$\hbar \sqrt{S_l(S_l+1)} = A_l = cte. \quad (2.16)$$

Neste caso, o limite clássico leva à substituição dos operadores de spin por vetores clássicos de módulo dado pela constante A_l (que tomaremos $A_1 = A_2 = 1$ no caso de spins iguais). Para o modelo de Heisenberg foi demonstrado rigorosamente que tal limite existe [18].

2.2.1 Princípio Variacional na Mecânica Quântica

Além da equação de Schrödinger, podemos utilizar o Princípio Variacional [19] para determinar o estado em que o sistema se encontra. Este princípio consiste em definir uma variável ação do tipo:

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\Psi, \bar{\Psi}) dt \quad (2.17)$$

onde \mathcal{L} representa a Lagrangeana, dada como:

$$\mathcal{L}(\Psi, \bar{\Psi}) = \frac{\langle \Psi | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (2.18)$$

quando $|\Psi\rangle$ não está normalizado.

A solução do sistema é o estado que minimiza a ação \mathcal{A} . Ou seja, quando $|\Psi\rangle$ é a solução do sistema temos que:

$$\delta\mathcal{A} = 0, \quad (2.19)$$

onde podemos observar que a solução deste problema também é solução da equação de Schrödinger.

Considerando que na definição da Lagrangeana dada em 2.18, o termo $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ corresponde à forma diferencial do operador de evolução temporal, podemos reescrever a Lagrangeana como:

$$\mathcal{L}(\Psi, \bar{\Psi}) = \frac{i\hbar}{2} \frac{\langle \Psi | \dot{\Psi} \rangle - \langle \dot{\Psi} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} - \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (2.20)$$

E comparando com a forma conhecida da Lagrangeana na Mecânica Clássica, temos uma função análoga à Hamiltoniana Clássica:

$$\mathcal{H} = \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (2.21)$$

Além disso, se for possível definir uma parametrização de $|\Psi\rangle$ por variáveis complexas z_l ($l = 1, 2, \dots, N$):

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))\rangle, \quad (2.22)$$

onde $\Psi(t)$ tem 1ª e 2ª derivadas bem definidas em z_l e \bar{z}_l , também podemos definir parênteses de Poisson generalizados:

$$\{f, g\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} f & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -(C^{-1})^t \\ C^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} g \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

onde:

$$C_{lj} = \frac{\partial^2}{\partial z_l \partial \bar{z}_j} \ln \langle \Psi | \Psi \rangle \quad (2.24)$$

Definida a parametrização acima e a função \mathcal{H} , o princípio variacional dado por (2.19) nos leva a equações análogas às equações canônicas:

$$\begin{aligned} \dot{z}_l &= i \{ \mathcal{H}, z_l \} \\ \dot{\bar{z}}_l &= i \{ \mathcal{H}, \bar{z}_l \} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Então, através do Princípio Variacional e da Parametrização somos capazes de montar, no sistema quântico, uma estrutura clássica que define um espaço de fase em função das variáveis z_l e \bar{z}_l .

Ainda nos resta definir em que representação o sistema quântico deve estar quando tomamos o limite clássico. É possível definir uma representação em função de grandezas $(S_l \sin \theta_l \cos \phi_l, S_l \sin \theta_l \sin \phi_l, S_l \cos \theta_l)$ correspondentes à posição angular do vetor \vec{s}_l . Mas tal procedimento é válido somente para o limite clássico extremo $S \rightarrow \infty$.

Neste projeto utilizamos a representação por estados coerentes [20] para obter o limite clássico de (1.1). As vantagens em utilizar este tipo de representação serão dadas em detalhes na próxima seção.

2.2.2 Estados Coerentes

Os estados coerentes foram primeiro conhecidos no caso de um oscilador harmônico, onde se notou que estes estados mantêm a coerência para evolução temporal [20] e além disso são menos suscetíveis à perda de coerência quando o oscilador está em contato com um banho térmico [16].

No entanto, foram observadas diversas características nestes estados que vão além de sua nomenclatura original. Dentre elas podemos citar:

- 1) Estes estados formam uma base de estados que gera o espaço de Hilbert;
- 2) Os elementos diagonais dos operadores na representação destes estados são bem definidos;
- 3) Existe uma associação natural entre a representação por estados coerentes e o limite clássico, quando minimizamos a desigualdade contida na relação de incerteza de Heisenberg.

Por esses motivos, consideramos conveniente escolher esta representação para o sistema quântico antes de tomar o limite clássico.

Em analogia ao caso do oscilador harmônico, definimos os estados coerentes para spin como [20]:

$$|z\rangle = e^{\frac{zS_+}{\hbar}} |S, -S\rangle \quad (2.26)$$

onde z é um número complexo.

Nesta definição os estados não estão normalizados e sua norma é dada abaixo:

$$\langle z|z\rangle = (1 + |z|^2)^{2S} \quad (2.27)$$

Além disso, estes estados podem ser utilizados para representar o espaço de Hilbert, e satisfazem uma relação de completeza:

$$\int |z\rangle \langle z| Dz = 1 \quad (2.28)$$

onde:

$$Dz = \frac{2S+1}{\pi} \frac{d[Re(z)]d[Im(z)]}{(1 + |z|^2)^2} \quad (2.29)$$

No entanto, os estados coerentes não formam uma base ortogonal. Por isso, o conjunto dos estados coerentes é conhecido como uma base supercompleta.

No caso de dois spins, estes estados são dados por [21]:

$$|z_1, z_2\rangle = \left[e^{\frac{\bar{z}_1 S_{1+}}{\hbar}} |S_1, -S_1\rangle \right] \otimes \left[e^{\frac{\bar{z}_2 S_{2+}}{\hbar}} |S_2, -S_2\rangle \right] \quad (2.30)$$

onde z_1 e z_2 são números complexos.

A norma destes estados é dada por:

$$\langle z_1, z_2 | z_1, z_2 \rangle = (1 + |z_1|^2)^{2S_1} (1 + |z_2|^2)^{2S_2} \quad (2.31)$$

Estes estados geram o espaço de Hilbert e têm a vantagem de que os elementos dos operadores nesta base são bem definidos. Sob este argumento podemos definir a função semiclássica \mathcal{H} correspondente ao operador Hamiltoniano na representação de estados coerentes e aplicar o que foi visto na seção anterior [21].

2.2.3 Dinâmica Semiclássica na Representação de Estados Coerentes

Os elementos diagonais do operador Hamiltoniano definem a função:

$$\mathcal{H}(z_1, z_2) = \frac{\langle z_1, z_2 | H | z_1, z_2 \rangle}{\langle z_1, z_2 | z_1, z_2 \rangle} \quad (2.32)$$

Como já vimos na seção 2.2.1, as variáveis complexas estão relacionadas a \mathcal{H} através de equações análogas às equações canônicas:

$$\begin{aligned}\dot{z}_l &= i \{ \mathcal{H}, z_l \} \\ \dot{\bar{z}}_l &= i \{ \mathcal{H}, \bar{z}_l \}\end{aligned}\tag{2.33}$$

Mas, para o caso de estados coerentes, a matriz C tem elementos de matriz:

$$C_{kl} = \frac{2S_l}{(1 + |z_l|^2)^2} \delta_{kl}\tag{2.34}$$

Logo, a partir da definição (2.23) os parênteses de Poisson na representação de estados coerentes têm a forma:

$$\{f, g\} = \sum_{l=1}^2 \frac{(1 + |z_l|^2)^2}{2S_l} \left[\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial g}{\partial z_l} - \frac{\partial f}{\partial z_l} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_l} \right]\tag{2.35}$$

Aplicando este resultado nas equações (2.33), obtemos as equações de movimento de z_l e \bar{z}_l :

$$\begin{aligned}\dot{z}_l &= i \frac{(1 + |z_l|^2)^2}{2S_l} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_l} \\ \dot{\bar{z}}_l &= -i \frac{(1 + |z_l|^2)^2}{2S_l} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_l}\end{aligned}\tag{2.36}$$

Observe que as equações acima ainda não são as equações de Hamilton, pois as variáveis z_l e \bar{z}_l não são variáveis canonicamente conjugadas.

No entanto, podemos definir variáveis canonicamente conjugadas em função das variáveis complexas z_l . Podemos escolher por exemplo, pares de variáveis do tipo ação e ângulo (I_l, ϕ_l) referentes ao spin S_l , relacionadas às variáveis complexas por:

$$z_l = \sqrt{\frac{\hbar S_l + I_l}{\hbar S_l - I_l}} e^{i\phi_l}\tag{2.37}$$

Estas variáveis estão definidas no limite:

$$-\hbar S_l \leq I_l \leq \hbar S_l \quad 0 \leq \phi_l \leq 2\pi$$

Para este novo par de variáveis as equações de movimento dadas em (2.36) podem ser reescritas na forma das equações de Hamilton:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_l &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_l} \\ \dot{I}_l &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_l}\end{aligned}\quad (2.38)$$

Uma vez definidas as equações para a representação semiclássica em estados coerentes, resta-nos agora aplicar esta estrutura para a Hamiltoniana de nosso interesse e tomar o limite clássico para que estas equações descrevam a dinâmica do sistema clássico.

2.2.4 Dinâmica Clássica para Dois Spins sob a Interação de Heisenberg

Agora, para determinar as equações de movimento resta apenas determinar a função \mathcal{H} correspondente a (1.1).

Mas no caso de um sistema de dois spins, devemos primeiro obter a representação em estados coerentes dos operadores S_{l+} , S_{l-} e S_{lz} ($l = 1, 2$). Ou seja, devemos determinar os elementos de matriz:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{l+} &= \frac{\langle z_l | S_{l+} | z_l \rangle}{\langle z_l | z_l \rangle} \\ \mathcal{S}_{l-} &= \frac{\langle z_l | S_{l-} | z_l \rangle}{\langle z_l | z_l \rangle} \\ \mathcal{S}_{lz} &= \frac{\langle z_l | S_{lz} | z_l \rangle}{\langle z_l | z_l \rangle}\end{aligned}\quad (2.39)$$

A função \mathcal{S}_{l-} é a mais simples de se obter, uma vez que:

$$e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}} S_{l-} = \sum_n \frac{z_l^n}{\hbar^n n!} (S_{l-})^{n+1} = \hbar \frac{d}{dz} \left(\sum_n \frac{z_l^n}{\hbar^n n!} (S_{l-})^n \right) = \hbar \frac{d}{dz_l} e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}} \quad (2.40)$$

E conseqüentemente, para um estado $|\Psi\rangle$ qualquer:

$$\langle z_l | S_{l-} | \Psi \rangle = \langle S_l, -S_l | e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}} S_{l-} | \Psi \rangle = \hbar \frac{d}{dz_l} \langle z_l | \Psi \rangle \quad (2.41)$$

Esta última relação ilustra a representação de S_{l-} como um operador diferencial na base de estados coerentes.

Para obter os outros operadores S_{l+} e S_{lz} partimos das relações de comutação:

$$\begin{aligned}[S_{lz}, S_{l-}] &= -\hbar S_{l-} \\ [S_{l+}, S_{l-}] &= 2\hbar S_{lz}\end{aligned}\tag{2.42}$$

para provar por indução que:

$$\begin{aligned}(S_{l-})^n S_{lz} &= S_{lz} (S_{l-})^n + n\hbar (S_{l-})^n \\ (S_{l-})^n S_{l+} &= S_{l+} (S_{l-})^n - 2n\hbar S_{lz} (S_{l-})^{n-1} - \hbar^2 n(n-1) (S_{l-})^{n-1}\end{aligned}\tag{2.43}$$

Assim, podemos utilizar o mesmo caminho utilizado para S_{l-} para demonstrar que:

$$\begin{aligned}e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}} S_{lz} &= S_{lz} e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}} + \hbar z_l \frac{d}{dz_l} e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}} \\ e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}} S_{l+} &= S_{l+} e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}} - 2\hbar z_l S_{lz} e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}} - \hbar^2 \frac{d}{dz_l} e^{\frac{z_l S_{l-}}{\hbar}}\end{aligned}\tag{2.44}$$

De onde também obtemos a representação diferencial para os operadores S_{l+} e S_{lz} :

$$\begin{aligned}\langle z_l | S_{lz} | \Psi \rangle &= \hbar \left(z_l \frac{d}{dz_l} - S_l \right) \langle z_l | \Psi \rangle \\ \langle z_l | S_{l+} | \Psi \rangle &= \hbar \left(-z_l^2 \frac{d}{dz_l} + 2S_l z_l \right) \langle z_l | \Psi \rangle\end{aligned}\tag{2.45}$$

E quando escolhemos $|\Psi\rangle = |z_l\rangle$ nas relações e dividimos por $\langle z_l | z_l \rangle$ obtemos as funções desejadas:

$$\frac{\langle z_l | S_{l+} | z_l \rangle}{\langle z_l | z_l \rangle} = \frac{2\hbar S_l z_l}{1 + |z_l|^2}\tag{2.46}$$

$$\frac{\langle z_l | S_{l-} | z_l \rangle}{\langle z_l | z_l \rangle} = \frac{2\hbar S_l \bar{z}_l}{1 + |z_l|^2}\tag{2.47}$$

$$\frac{\langle z_l | S_{lz} | z_l \rangle}{\langle z_l | z_l \rangle} = -\hbar S_l \frac{1 - |z_l|^2}{1 + |z_l|^2}\tag{2.48}$$

É importante notar que a expressão dada em 2.48 nos dá uma relação direta entre a função \mathcal{S}_{lz} com a variável I_l introduzida na seção 2.2.3:

$$\mathcal{S}_{lz} = -\hbar S_l \frac{1 - |z_l|^2}{1 + |z_l|^2} = I_l \quad (2.49)$$

Logo, a variável I_l está associada com a componente em z do spin l .

Tendo em mãos as equações de 2.46 a 2.48, podemos obter a função $\mathcal{H}(z_1, z_2)$.

O operador dado em (1.1) também pode ser representado pela forma abaixo:

$$H = \frac{(a_0 + a_1)}{4} (S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{2+}) + \frac{a_0 - a_1}{4} (S_{1+} S_{2+} + S_{1-} S_{2-}) + a_2 S_{1z} S_{2z} \\ + g_1 \hbar S_2 S_{1z} + g_2 \hbar S_1 S_{2z}$$

Com as representações dos operadores de spins dadas pelas equações (2.46) a (2.48) podemos determinar a função $\mathcal{H}(z_1, z_2)$ correspondente ao Operador Hamiltoniano acima:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2 S_1 S_2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} [(a_0 - a_1)(z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2) + (a_0 + a_1)(\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2) \\ + a_2(1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)] - g_1 \hbar^2 S_1 S_2 \frac{(1 - |z_1|^2)}{(1 + |z_1|^2)} - g_2 \hbar^2 S_1 S_2 \frac{(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_2|^2)}$$

Mas em função dos pares de variáveis canonicas (I_l, ϕ_l) ($l = 1, 2$), esta função pode ser reescrita como:

$$\mathcal{H}(I_1, \phi_1, I_2, \phi_2) = \frac{1}{2} \sqrt{(\hbar^2 S_1^2 - I_1^2)(\hbar^2 S_2^2 - I_2^2)} [(a_0 - a_1) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ + (a_0 + a_1) \cos(\phi_2 - \phi_1)] + a_2 I_1 I_2 + g_1 \hbar S_2 I_1 + g_2 \hbar S_1 I_2 \quad (2.50)$$

Resta-nos agora tomar o limite clássico do sistema. Devemos notar que no limite $\hbar \rightarrow 0$ e $S_l \rightarrow \infty$ a condição 2.16 pode ser reescrita como:

$$\hbar S_l = A_l \quad (2.51)$$

Então, a aplicação do limite clássico sobre estas equações consiste em escolhermos valores convenientes para os fatores A_l ($l = 1, 2$), que passarão a ser associados ao tamanho dos spins clássicos.

Daqui em diante fixaremos os valores:

$$A_1 = cte \quad e \quad A_2 = 1 \quad (2.52)$$

onde A_1 tem valor 1 para o caso de dois spins iguais ($S_1 = S_2$) e maior que 1 para spins diferentes (estaremos sempre considerando $S_1 \geq S_2$).

Então, para tomar o limite clássico do sistema definimos as variáveis intensivas dadas por:

$$K_l = \frac{I_l}{\hbar S_l} \quad , \quad \phi_l \quad (2.53)$$

Também devemos considerar a função $\mathcal{H}(z_1, z_2)$ escalonada pelo termo $\hbar S_1 \hbar S_2$:

$$\mathcal{H}_{Cl}(z_1, z_2) = \frac{\mathcal{H}}{\hbar S_1 \hbar S_2} \quad (2.54)$$

Assim, a energia não divergirá ao tomarmos $S_l \rightarrow \infty$ no problema quântico. Com isso, a Hamiltoniana passa a ter a forma abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Cl}(K_1, \phi_1, K_2, \phi_2) = & \frac{1}{2} \sqrt{(1 - K_1^2)(1 - K_2^2)} [(a_0 - a_1) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ & + (a_0 + a_1) \cos(\phi_2 - \phi_1)] + a_2 K_1 K_2 + g_1 K_1 + g_2 K_2 \end{aligned} \quad (2.55)$$

Estas novas variáveis satisfazem as equações de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_l &= \frac{\partial \mathcal{H}_{Cl}}{\partial K_l} \\ \dot{K}_l &= -\frac{\partial \mathcal{H}_{Cl}}{\partial \phi_l} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Assim definido o limite clássico, se quisermos relacionar com as equações 2.38 onde a variável I_l é extensiva, temos que ter uma reescala no tempo

$$\frac{d}{dt} K_l = -\frac{\partial \mathcal{H}_{Cl}}{\partial \phi_l} \implies \frac{d}{dt_l} I_l = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_l}$$

onde:

$$t_l = \frac{t}{A_k} \quad (k \neq l) \quad (2.57)$$

Com isso, podemos determinar as equações de movimento do sistema clássico através das equações de Hamilton (2.56):

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 &= -\frac{K_1}{2} \sqrt{\frac{(1-K_2^2)}{(1-K_1^2)}} [(a_0 - a_1) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\
&\quad + (a_0 + a_1) \cos(\phi_2 - \phi_1)] + a_2 K_2 + g_1 \\
\dot{K}_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{(1-K_1^2)(1-K_2^2)} [(a_0 - a_1) \sin(\phi_1 + \phi_2) \\
&\quad - (a_0 + a_1) \sin(\phi_2 - \phi_1)] \\
\dot{\phi}_2 &= -\frac{K_2}{2} \sqrt{\frac{(1-K_1^2)}{(1-K_2^2)}} [(a_0 - a_1) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\
&\quad + (a_0 + a_1) \cos(\phi_2 - \phi_1)] + a_2 K_1 + g_2 \\
\dot{K}_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{(1-K_1^2)(1-K_2^2)} [(a_0 - a_1) \sin(\phi_1 + \phi_2) \\
&\quad + (a_0 + a_1) \sin(\phi_2 - \phi_1)]
\end{aligned} \tag{2.58}$$

onde já foi feita a escolha:

$$\hbar S_1 = A_1 \quad \hbar S_2 = A_2 = 1. \tag{2.59}$$

Observe que para compararmos com o limite clássico, devemos escolher o regime semiclássico onde os termos de campo externo devem ser ajustados apropriadamente para darem o mesmo limite, isto é, ao aumentarmos S_2 , o termo $g_1 \hbar S_2$ deve aumentar concomitantemente.

2.3 Exemplos

Uma vez obtidas as equações de movimento, podemos construir as seções de Poincaré do sistema. Podemos considerar, por exemplo, um sistema de dois spins iguais ($A_1 = A_2 = 1$) cujos coeficientes de interação são dados por:

$$a_0 = 0.5; a_2 = 0.0; g_1 = g_2 = 0.5 \quad (2.60)$$

onde construímos seções de Poincaré para três valores diferentes de a_1 (0.0, 0.25, 0.5).

As contrapartes quânticas destes sistemas têm uma Hamiltoniana do tipo:

$$H = \frac{1}{2}S_{1x}S_{2x} + a_1S_{1y}S_{2y} + \frac{1}{2}(\hbar S_2S_{1z} + \hbar S_1S_{2z}) \quad (2.61)$$

com os valores de a_1 dados acima.

Com isso obtemos as seções da figura 2.1, onde consideramos o plano definido por $K_1 = 0.0$ e energia $E = 0.0$.

Podemos observar que para $a_0 = a_1$ temos um sistema totalmente integrável. Isto é esperado, uma vez que nesta situação a Hamiltoniana clássica dada em (2.54) toma a forma abaixo:

$$\mathcal{H}_{Cl}(K_1, \phi_1, K_2, \phi_2) = \sqrt{(1 - K_1^2)(1 - K_2^2)} [a_0 \cos(\phi_2 - \phi_1)] + a_2 K_1 K_2 + g_1 K_1 + g_2 K_2 \quad (2.62)$$

E nestas condições podemos definir novos pares de variáveis canônicas:

$$\begin{aligned} m &= K_1 + K_2 & , & \quad \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \\ \eta &= K_2 - K_1 & , & \quad \alpha = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde podemos observar que ϕ é uma variável cíclica.

Logo, para o caso $a_0 = a_1$, a variável m , que corresponde na representação semiclássica à componente em z do spin total, deve ser conservada. Como também temos a conservação de energia, o sistema possui então dois graus de liberdade (sendo então um sistema integrável).

Além disso, vemos que é possível obter regimes mistos de regiões regulares e caóticas através de uma escolha conveniente dos coeficientes da interação e da superfície de energia a ser considerada.

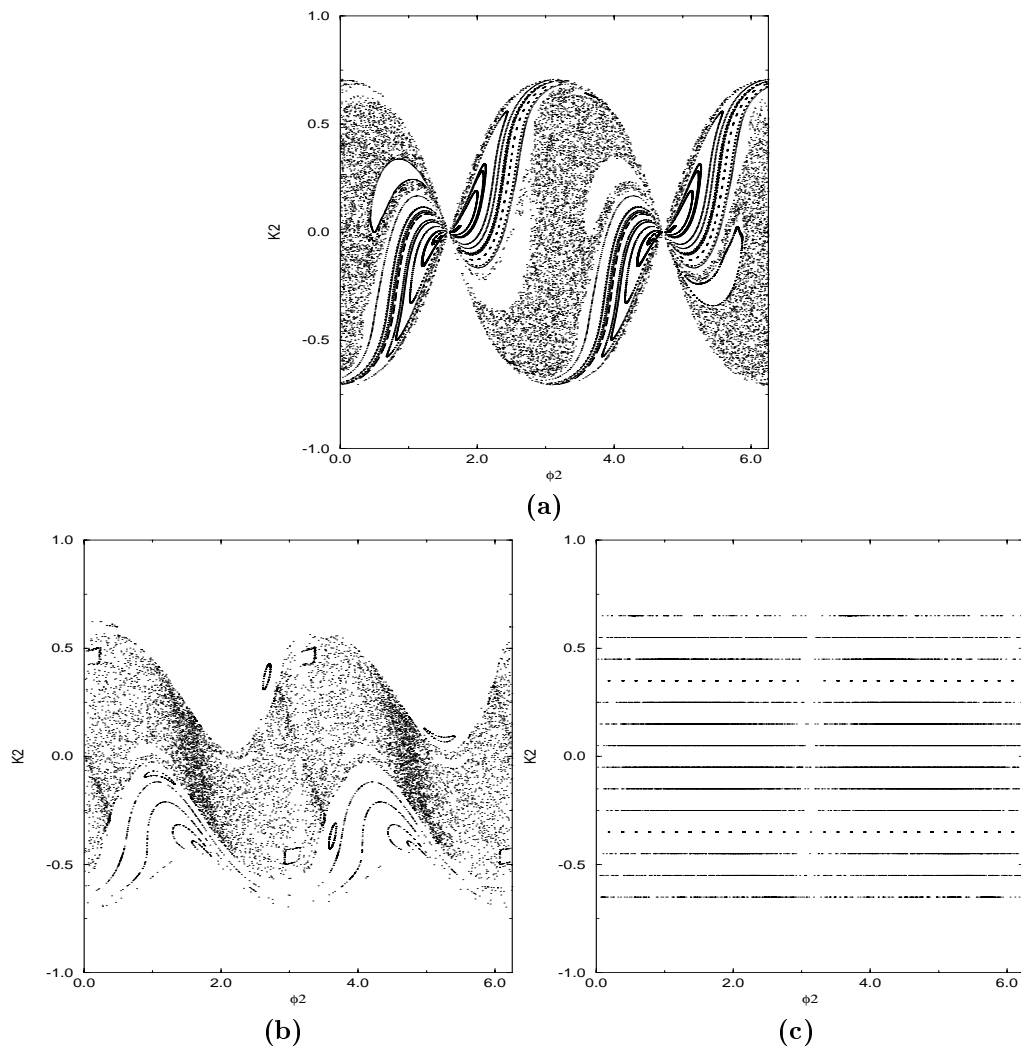


Figura 2.1: Seções de Poincaré considerando diferentes valores de a_1 : (a) $a_1 = 0$ (b) $a_1 = 0.25$ (c) $a_1 = 0.5$

Capítulo 3

Influência de Caos sobre a Dinâmica de Emaranhamento

O nosso objetivo é estabelecer uma conexão entre o efeito de descoerência rápida do sistema de spins quântico e a presença de caos no análogo clássico. Para isto, seguindo o procedimento da referência [7], utilizamos os estados coerentes como estado inicial do sistema quântico, pois correspondem a pacotes de ondas centrados em pontos do espaço de fase clássico.

A nossa análise consiste primeiramente em obter a seção de Poincaré do sistema clássico para casos em que tenhamos um regime apropriado de caos. Para isto utilizamos as equações de movimento obtidas na seção 2.2.4.

Em seguida escolhemos pontos localizados em regiões de regime regular e caótico na seção de Poincaré. Com isso podemos definir no sistema quântico estados coerentes que estão centrados nestes pontos.

Finalmente, utilizamos estes estados como estados iniciais para o sistema e observamos sua dinâmica de entrelaçamento sob a interação dada pela Hamiltoniana quântica:

$$H = a_0 S_{1x} S_{2x} + a_1 S_{1y} S_{2y} + a_2 S_{1z} S_{2z} + g_1 \hbar S_2 S_{1z} + g_2 \hbar S_1 S_{2z} \quad (3.1)$$

3.1 Spins Iguais

Inicialmente consideramos o caso de dois spins iguais ($S_1 = S_2 = S$). Então o sistema clássico consiste de dois spins clássicos de tamanhos iguais

$(\hbar S_1 = \hbar S_2)$, que neste caso consideraremos unitário:

$$A_1 = A_2 = 1. \quad (3.2)$$

Observamos apenas casos em que os coeficientes g_1 e g_2 também serão iguais:

$$g_1 = g_2 = g \quad (3.3)$$

Assim, as equações de movimento (2.58) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= -\frac{K_1}{2} \sqrt{\frac{(1-K_2^2)}{(1-K_1^2)}} [(a_0 - a_1) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ &\quad + (a_0 + a_1) \cos(\phi_2 - \phi_1)] + a_2 K_2 + g \\ \dot{K}_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{(1-K_1^2)(1-K_2^2)} [(a_0 - a_1) \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ &\quad - (a_0 + a_1) \sin(\phi_2 - \phi_1)] \\ \dot{\phi}_2 &= -\frac{K_2}{2} \sqrt{\frac{(1-K_1^2)}{(1-K_2^2)}} [(a_0 - a_1) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ &\quad + (a_0 + a_1) \cos(\phi_2 - \phi_1)] + a_2 K_1 + g \\ \dot{K}_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{(1-K_1^2)(1-K_2^2)} [(a_0 - a_1) \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ &\quad + (a_0 + a_1) \sin(\phi_2 - \phi_1)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tendo as equações acima, tratamos de observar dois casos:

Caso A:

Tomamos como valores das constantes de interação:

$$a_0 = 0.5, a_1 = a_2 = 0.0, g = 0.5 \quad (3.5)$$

que corresponde no sistema quântico (com $S_1 = S_2 = S$) a Hamiltoniana dada por:

$$H = \frac{1}{2} [S_{1x} S_{2x} + \hbar S (S_{1z} + S_{2z})] \quad (3.6)$$

Montamos a seção de Poincaré do análogo clássico deste sistema baseado nas equações de movimento (3.4). Estas seções foram obtidas em função das variáveis K_2 e ϕ_2 no plano definido por $K_1 = 0.0$ e energia $E = -0.15$.

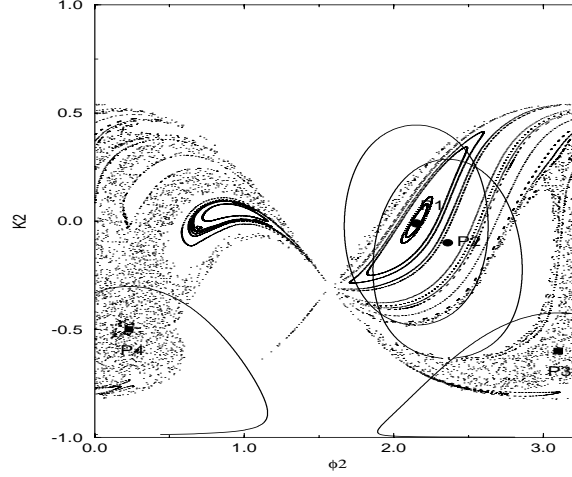


Figura 3.1: seção de Poincaré para o caso **A**, considerando as superfícies de energia $E = -0.15$; $A_1 = 1, A_2 = 1, a_0 = 0.5, a_1 = 0.0 = a_2 = 0.0, g = 0.5$. As linhas contínuas indicam as larguras a meia altura dos pacotes coerentes centrados em cada um dos pontos no caso de spins quânticos com $S=9$.

Escolhemos sobre esta seção quatro pontos que estão indicados na figura 3.1, onde P_1 e P_2 se encontram em toros na região **regular** e os pontos P_3 e P_4 sobre as regiões **caóticas**.

Em seguida construímos gráficos do defeito de idempotência em função do tempo para quatro estados iniciais. Recordando, o defeito de idempotência do sistema é dado por:

$$\delta(t) = 1 - \text{Tr} \{ \rho_2^2 \} \quad (3.7)$$

onde ρ_2 é a matriz densidade reduzida do spin de menor tamanho

$$\rho_2 = \text{Tr}_1 \{ \rho \} \quad (3.8)$$

Os estados iniciais correspondem a pacotes coerentes que estão centrados nos quatro pontos indicados na seção de Poincaré do sistema clássico. Como resultado obtivemos os gráficos da figura 3.2, onde se pode observar que os casos centrados em regiões caóticas têm menor tempo de descoerência (atingem antes o patamar).

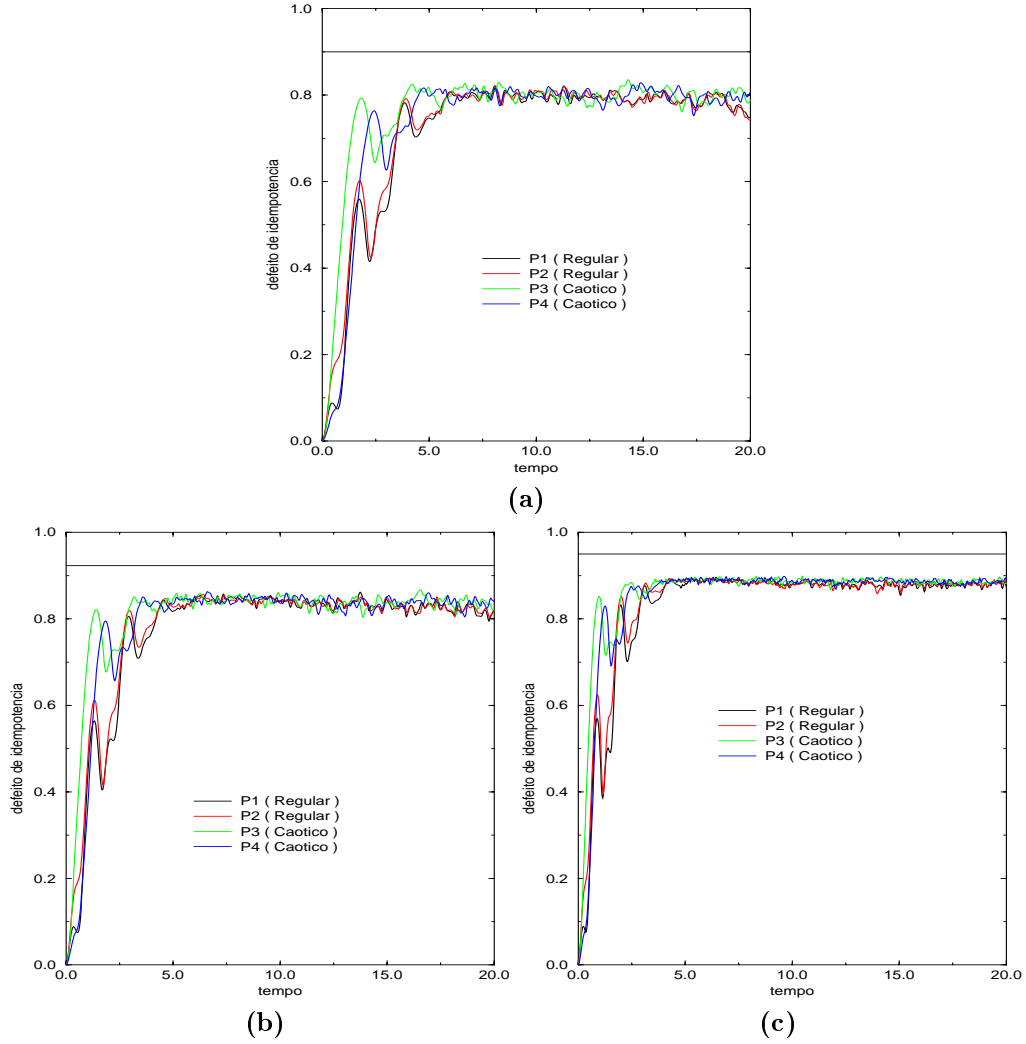


Figura 3.2: evolução do defeito de idempotência para os estados iniciais centrados nos pontos indicados na figura 3.1. Consideramos $S_1 = S_2 = S$ onde: (a) $S = \frac{9}{2}$ (b) $S = 6$ e (c) $S = 9$. A linha horizontal indica o limitante superior das curvas para cada valor de spin.

Consideramos três valores diferentes para os spins, de mesmo tamanho S ($= \frac{9}{2}, 6, 9$). Em todos os casos o gráfico apresenta uma curva crescente, tendendo a atingir um valor limite (formando assim um patamar), a menos de algumas flutuações.

Além de apresentarem um menor tempo de descoerência, a amplitude das flutuações em torno do valor médio no patamar para pacotes inicialmente centrados em regiões caóticas são menores.

Observe que, conforme aumentamos o tamanho do spin, a altura do patamar também fica maior, além de apresentar uma taxa maior de perda de coerência. Isto é melhor ilustrado na figura 3.3, onde observamos a evolução temporal do defeito de idempotência para três valores diferentes de spin, mas para pacotes centrados na mesma condição inicial.

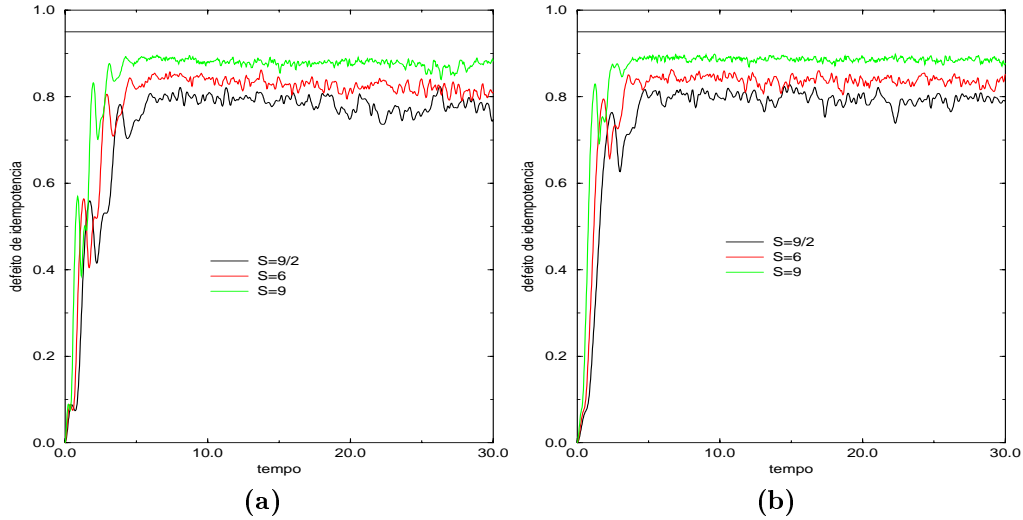


Figura 3.3: gráficos do defeito de idempotência para três diferentes valores de spin. Estamos considerando estados iniciais centrados em $P_1((a))$ e $P_4((b))$. A linha horizontal representa o valor do limitante superior para $S = 9$.

Este comportamento pode ser explicado se considerarmos o estado que apresenta o maior valor para δ (no qual os dois spins apresentam o maior emaranhamento). Este estado corresponde ao caso em que o spin de menor tamanho se encontra em um estado de mistura estatística com pesos iguais para todos os valores possíveis da componente z do spin. Neste caso a matriz reduzida para ρ_2 é diagonal, com valor $\frac{1}{N}$ para os elementos da diagonal

(populações), onde $N = 2S + 1$ é o número de estados da base.

Para este estado o defeito de idempotência tem valor:

$$\delta_{\infty} = 1 - \frac{1}{N} \quad (3.9)$$

Então este valor corresponde ao limitante superior para as curvas do defeito de idempotência. Observe que quanto maior o valor do spin, mais próximo este valor estará de 1.

Assim podemos dizer que, quanto maior o spin, maior será o valor do limitante superior das curvas do defeito de idempotência, o que explica o comportamento ilustrado na figura 3.3.

Caso B:

Agora as constantes de interação são escolhidos como se segue:

$$a_0 = 0.5, a_1 = 0.0, a_2 = g = 0.5 \quad (3.10)$$

onde agora temos no sistema quântico:

$$H = \frac{1}{2} [S_{1x}S_{2x} + S_{1z}S_{2z} + \hbar S (S_{1z} + S_{2z})] \quad (3.11)$$

E da mesma forma obtemos a seção apresentada na figura 3.4 usando (3.4). Desta vez consideramos $E = 0.0$ e escolhemos quatro pontos, usando os mesmos critérios do caso **A**.

Novamente, observamos a evolução do defeito de idempotência na figura 3.5 para quatro diferentes tamanhos para os dois spins ($S = \frac{9}{2}, 6, 9, 20$). Os estados iniciais estão centrados nos pontos indicados na figura 3.4.

Nestes gráficos nota-se um comportamento que não era evidente no caso anterior: o patamar para estados centrados em condições iniciais caóticas apresenta-se mais elevado que no caso regular. Isto se deve à tendência das órbitas caóticas no espaço de fase clássico de percorrerem toda a região que lhes é permitida energeticamente. Este comportamento se reflete no sistema quântico, onde a função de onda se espalha facilmente sobre esta região.

Desta forma, um maior número de estados são populados no sistema e seu estado fica mais próximo do estado de mistura estatística que apresenta o valor máximo de δ possível (dado em (3.9)), sobre o qual discutimos no caso

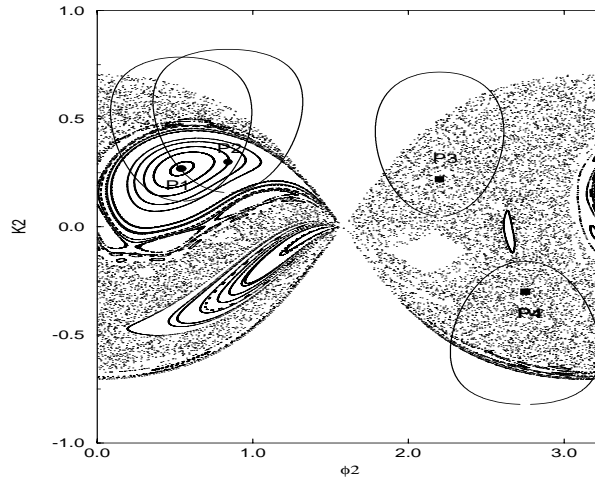


Figura 3.4: seção de Poincaré para o caso **B**, considerando as superfícies de energia $E = 0.0$; $A_1 = 1, A_2 = 1, a_0 = 0.5, a_1 = 0.0, a_2 = g = 0.5$. As linhas contínuas representam a largura do pacote coerente inicial a meia altura para $S = 20$.

anterior. Esta diferença fica mais evidente conforme aumentamos o tamanho dos spins, pois este aumento torna cada vez menor largura do pacote de onda, que fica cada vez mais localizado dentro das regiões caóticas e regulares.

Assim como no caso anterior, podemos observar que para os estados iniciais centrados nas regiões de regime caótico a taxa de perda de coerência é maior (o defeito de idempotência atinge mais rápido o patamar) embora neste caso o início da curva mostre um crescimento mais rápido do caso P_1 , por exemplo, comparado a P_4 , confirmando neste modelo os resultados obtidos em [7]. Além disso, estes estados inicialmente centrados na região caótica apresentam oscilações de menor amplitude após atingir o patamar.

Outro comportamento que se repete aqui é o do aumento do patamar quando consideramos tamanhos maiores de spin (mas mantendo $S_1 = S_2$), que ilustramos aqui na figura 3.6. Novamente, observamos que a taxa de perda de coerência também aumenta para os dois estados iniciais conforme aumentamos o valor de S , embora a amplitude das flutuações após atingir o patamar sejam menores.

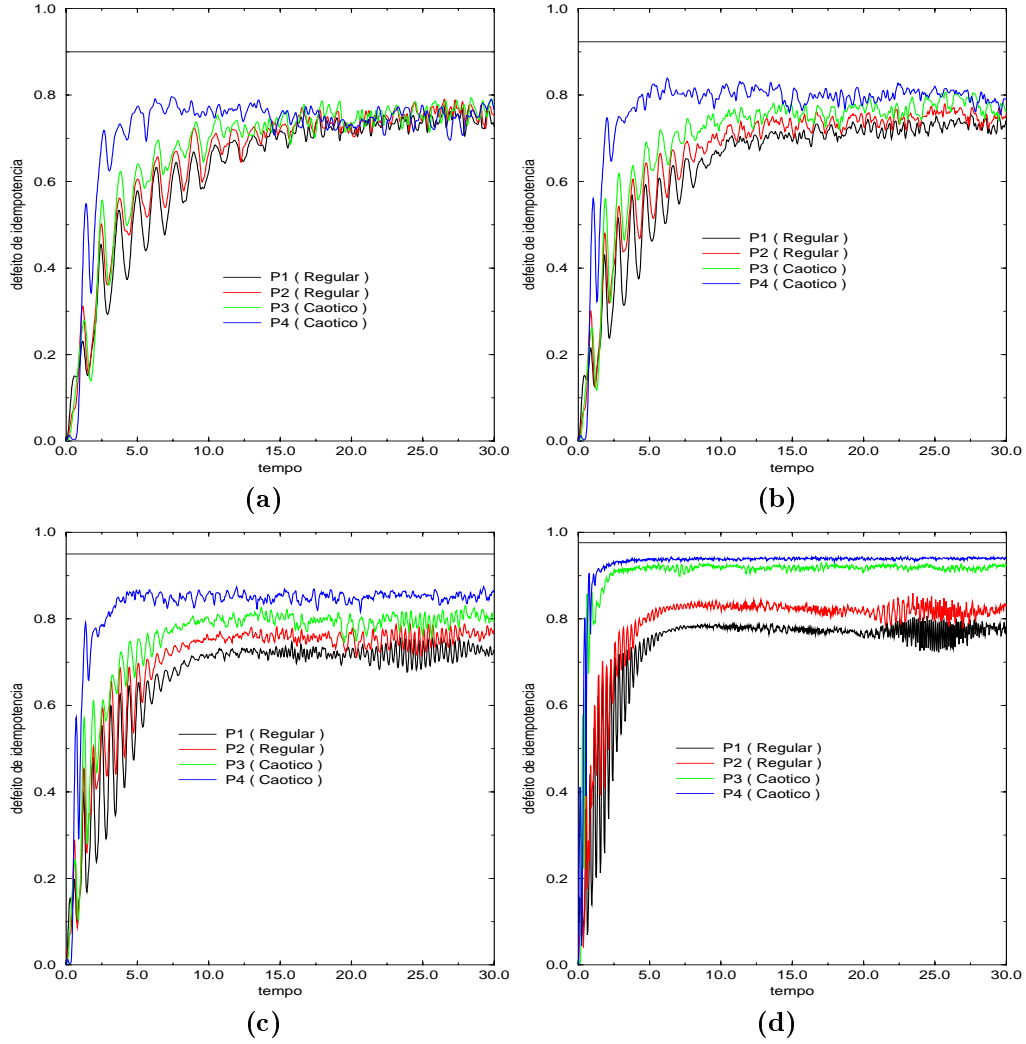


Figura 3.5: evolução do defeito de idempotência considerando estados iniciais centrados nos pontos da figura 3.4. Temos que $S_1 = S_2 = S$ onde: (a) $S = \frac{9}{2}$ (b) $S = 6$ (c) $S = 9$ e (d) $S = 20$. A linha horizontal representa o limitante superior das curvas para cada valor de spin.

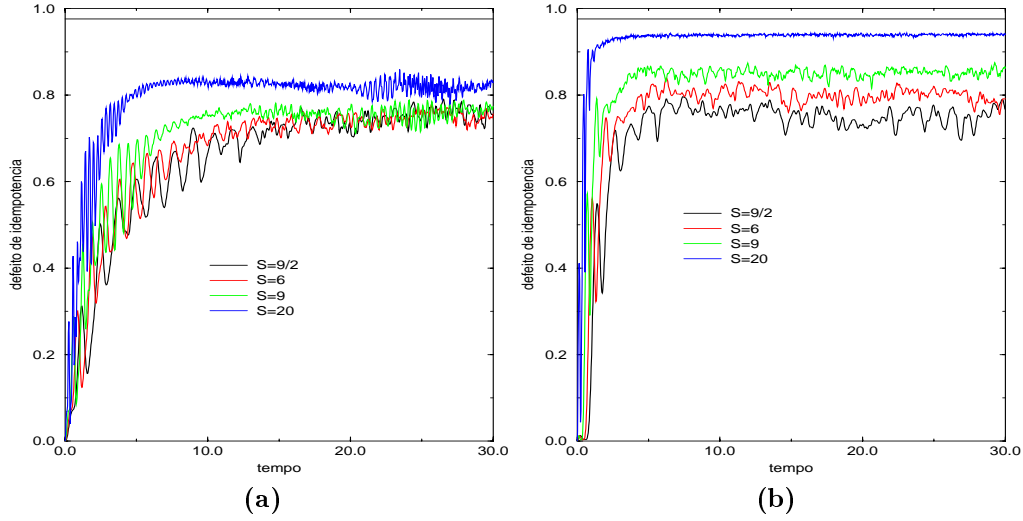


Figura 3.6: gráficos do defeito de idempotência para três diferentes valores de spin no caso **B**. Estamos considerando estados iniciais centrados em P_2 ((a)) e P_4 ((b)). A linha horizontal representa o limitante superior para $S=20$.

3.2 Spins Diferentes

Feitas as observações da seção anterior, podemos generalizar nosso estudo para o caso de dois spins diferentes. Pretendemos observar nesta seção o efeito obtido quando os dois spins apresentam tamanhos desiguais, pois se trata do caso em que o espaço de estados de um spin é muito menor que o outro. Além disso, veremos que o sistema de spins clássico correspondente a estes casos apresenta regimes de movimento bem diversificados no espaço de fase, permitindo maior liberdade em estudar diversas situações.

Então, vamos considerar no limite clássico uma condição mais geral do que foi utilizada anteriormente para spins iguais:

$$\hbar S_l = A_l, (l = 1, 2) \quad (3.12)$$

Devemos notar que, como \hbar é a mesma nas duas condições (com $l = 1$ e $l = 2$), devemos impor que o limite $S_1 \rightarrow \infty$ e $S_2 \rightarrow \infty$ deve ser feito de forma que a razão $\frac{S_2}{S_1}$ seja constante. Em outras palavras, o análogo quântico deste sistema deve ter números quânticos de spin S_1 e S_2 de tal forma que satisfaçam:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{A_1}{A_2} \quad (3.13)$$

e fixaremos $A_2 = 1$ no sistema clássico.

Assim como foi feito para o caso de dois spins iguais, construímos as seções de Poincaré nas variáveis K_2 e ϕ_2 no plano definido por $K_1 = 0$ e energia $E = cte$. Ilustramos aqui dois casos:

Caso C:

Aqui consideramos o caso de dois spins clássicos com módulos de valores:

$$A_1 = 10; A_2 = 1, \quad (3.14)$$

cujos valores para os coeficientes de interação são:

$$a_0 = 0.5, a_1 = 0.0, a_2 = g_1 = g_2 = 0.5 \quad (3.15)$$

onde temos no sistema quântico a Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} (S_{1x}S_{2x} + S_{1z}S_{2z} + \hbar S_2S_{1z} + \hbar S_1S_{2z}) \quad (3.16)$$

com $\frac{S_1}{S_2} = \frac{A_1}{A_2} = 10$

Utilizamos aqui as equações de movimento (2.58) deduzidas no capítulo anterior com os valores dados acima para obter a seção de Poincaré do sistema clássico apresentada na figura 3.7. Esta seção foi obtida para as superfícies com energia $E = 0.0$.

Como foi feito no caso para dois spins iguais, escolhemos quatro pontos, onde os pontos P_1 e P_2 se encontram na região regular e P_3 e P_4 se encontram na região caótica.

Agora para o sistema quântico, consideramos dois spins quânticos caracterizados por valores de S_1 ($= 30$) e S_2 ($= 3$) que satisfazem a proporção entre os tamanhos A_1 e A_2 dos spins clássicos ($A_1/A_2 = 10$).

Neste sistema, também consideramos como estado inicial pacotes coerentes centrados nos pontos indicados na figura 3.7 e observamos a evolução temporal do defeito de idempotência. Desta forma obtemos o gráfico apresentado na figura 3.8.

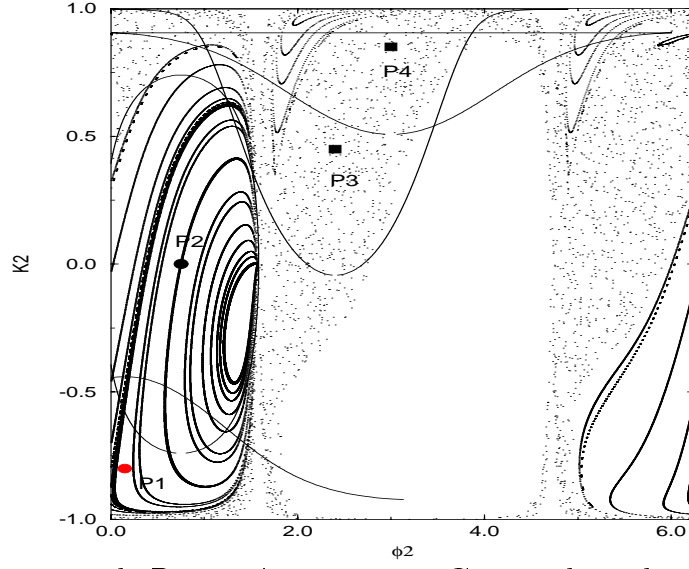


Figura 3.7: seção de Poincaré para o caso **C**, considerando as superfícies de energia $E = 0.0$; $A_1 = 10$, $A_2 = 1$, $a_0 = 0.5$, $a_1 = 0.0$, $a_2 = g_1 = g_2 = 0.5$. As linhas contínuas representam a largura do pacote coerente inicial à meia altura para $S_2 = 3$.

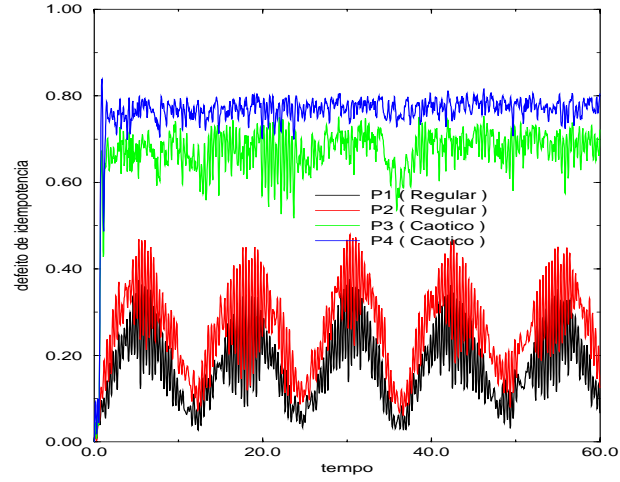


Figura 3.8: gráfico $\delta(t)$ versus t considerando estados iniciais centrados nos pontos da figura 3.7, com $S_1 = 30$, $S_2 = 3$, $a_0 = 0.5$, $a_1 = 0.0$, $a_2 = g_1 = g_2 = 0.5$.

Caso D:

Desta vez consideramos um sistema de dois spins clássicos de valores:

$$A_1 = 6; A_2 = 1 \quad (3.17)$$

cujos valores para os coeficientes de interação são:

$$a_0 = 0.5, a_1 = 0.235, a_2 = 0.0; g_1 = g_2 = 0.5 \quad (3.18)$$

Desta vez temos, no sistema quântico, a Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}S_{1x}S_{2x} + 0.235S_{1y}S_{2y} + \frac{1}{2}(\hbar S_2S_{1z} + \hbar S_1S_{2z}) \quad (3.19)$$

com $\frac{S_1}{S_2} = \frac{A_1}{A_2} = 6$

Utilizando as mesmas equações para os dados acima, obtemos no sistema clássico a seção da figura 3.9, sendo que consideramos novamente as superfícies de energia $E = 0.0$.

Aqui devemos observar que o ponto P_2 foi situado em uma região regular bastante singular onde os toros sofrem muitas reentrâncias, o qual pode ter um efeito mais próximo do regime caótico.

Em seguida, no sistema de spins quântico com $S_1 = 30$ e $S_2 = 5$, tomamos pacotes coerentes centrados nos pontos da figura 3.9 como estados iniciais. A evolução temporal do defeito de idempotência para os quatro estados iniciais é ilustrada na figura 3.10.

As curvas que obtemos aqui também são crescentes, tendendo a atingir um patamar. Mas devemos notar que a curva para o estado inicial centrado em P_2 apresenta uma taxa de crescimento tão grande quanto as curvas centradas nas regiões caóticas. No entanto, ela apresenta várias quedas ao longo do tempo, o que é mais característico dos casos regulares (isto é, a descoerência é apenas parcial).

Assim como no caso de dois spins iguais, podemos observar que para os estados iniciais centrados nas regiões caóticas a perda de coerência ocorre mais rápido. Mas para o caso **D**, a curva do gráfico da figura 3.10 para o estado inicialmente centrado em P_2 apresenta uma taxa de perda de coerência tão grande quanto no caso caótico.

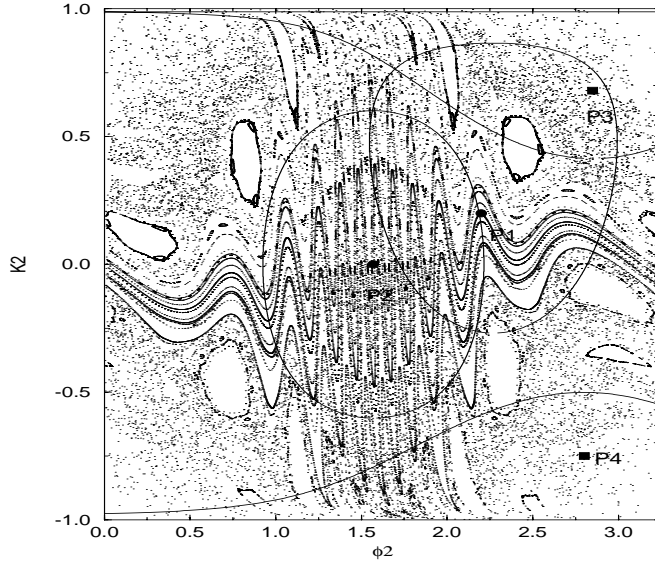


Figura 3.9: seção de Poincaré para o caso **D**, considerando as superfícies de energia $E = 0.0$, $A_1 = 6$, $A_2 = 1$, $a_0 = 0.5$, $a_1 = 0.235$, $a_2 = 0.0$, $g_1 = g_2 = 0.5$. As linhas contínuas representam a largura do pacote coerente inicial à meia altura para $S_2 = 5$.

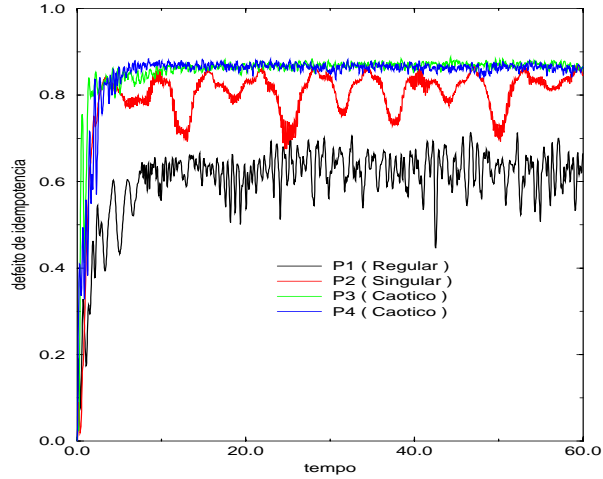


Figura 3.10: evolução temporal do defeito de idempotência para estados iniciais centrados nos pontos indicados na figura 3.9, com $S_1 = 30$, $S_2 = 5$, $a_0 = 0.5$, $a_1 = 0.235$, $a_2 = 0.0$, $g_1 = g_2 = 0.5$.

No entanto, devemos lembrar que este ponto se situa numa região do espaço de fase de comportamento bem peculiar, onde a presença de reentrâncias permite à curva apresentar características associadas ao caso caótico. Apesar disso, ainda pode-se notar altas amplitudes de variação na região do patamar para a mesma curva, efeito associado ao caso regular, uma vez que o ponto ainda se localiza em um toro regular.

Para o caso anterior **C** as ilhas são bem maiores que os outros casos, e por isso os gráficos de $\delta(t)$ (figura 3.8) apresentam uma diferença entre os comportamentos regular e caótico mais acentuada. Neste caso, pode-se dizer que o caso regular volta a recuperar coerência em intervalos regulares de aproximadamente $t = 12.5$.

3.2.1 Populações e Coerências

Tendo em vista que o comportamento do defeito de idempotência $\delta(t)$ é o resultado do comportamento da matriz densidade reduzida $\rho_1(t)$, vale a pena analisar os elementos de matriz de $\rho_1(t)$: as populações (elementos diagonais) e as coerências (elementos não-diagonais).

Em estudos realizados no modelo de Jaynes-Cummings de N-átomos [22] observa-se diferenças significativas na população e coerências quando se compara aspectos gerais do caso regular com o caótico:

i) as populações dos casos **caóticos** que se iniciam em valores diferentes tendem a se igualar (em média) quando na escala de tempo de descoerência (tempo em que $\delta(t)$ vai ao patamar), enquanto que no caso regular a tendência é manter valores médios distintos.

ii) as diferentes coerências no caso caótico tendem a cair no tempo de descoerência, permanecendo pequenas oscilações próximas de zero, enquanto que no caso regular a queda é mais lenta e permanece praticamente no mesmo nível.

O objetivo desta seção é observar o comportamento destas populações e coerências no caso em que os dois subsistemas possuem espectro finito (tendendo a infinito só no limite $\hbar \rightarrow 0$ e $S \rightarrow \infty$) em contrapartida ao modelo de Jaynes-Cummings de N-átomos onde um dos subsistemas é um oscilador harmônico e portanto de espectro infinito.

Nos dois casos analisados anteriormente observamos a evolução temporal

das populações e coerências da matriz densidade reduzida do spin de menor tamanho (ρ_2). A análise, em ambos os casos, se restringiu aos casos em que o estado inicial do sistema estava centrado nos pontos P_1 e P_4 .

Estes elementos da matriz densidade reduzida foram observados na base de autoestados do operador S_{2z} , ou seja, na base $\{|m_z\rangle, m_z = S_2, \dots, -S_2\}$.

Voltemos então aos dois casos:

Caso C:

Em cada um dos dois estados iniciais consideramos a coerência entre os dois autoestados de S_{2z} mais populados. Em seguida observamos a evolução temporal desta grandeza, resultando no gráfico da figura 3.11.

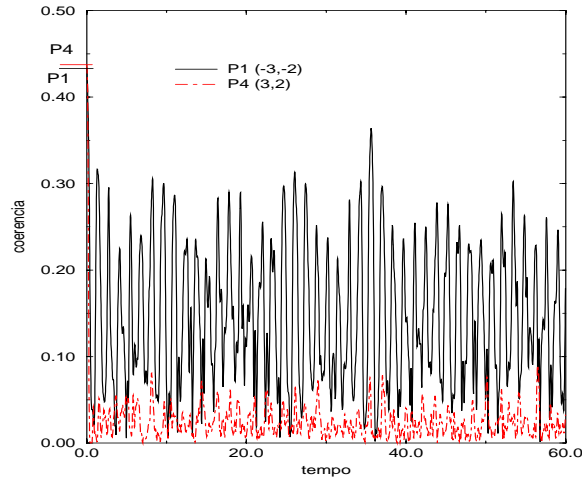


Figura 3.11: gráfico da coerência em função do tempo para estados iniciais inicialmente centrados em P_1 (regular) e P_4 (caótico) indicados na figura 3.7. Está sendo considerado a coerência entre os dois estados da base inicialmente mais populados.

Podemos notar que ambas as curvas são em, média, decrescentes no início mas, assim como nas curvas para o defeito de idempotência, elas tendem a um valor médio limite, confirmando o comportamento **ii)** observado em outro modelo [22].

Além da coerência, observamos a evolução temporal de três populações para cada estado inicialmente centrado em P_1 e P_4 . Optamos por três populações que tem valores bem distintos inicialmente.

Como resultado, obtemos as curvas apresentadas na figura 3.12, onde cada gráfico ((a) ou (b)) corresponde ao sistema cujo estado inicial estava centrado em P_1 ou P_4 , também confirmando que o comportamento **i)** observado no modelo de N-átomos de Jaynes-Cummings tem um caráter universal, independente do tamanho relativo do espaço de fase dos dois subsistemas.

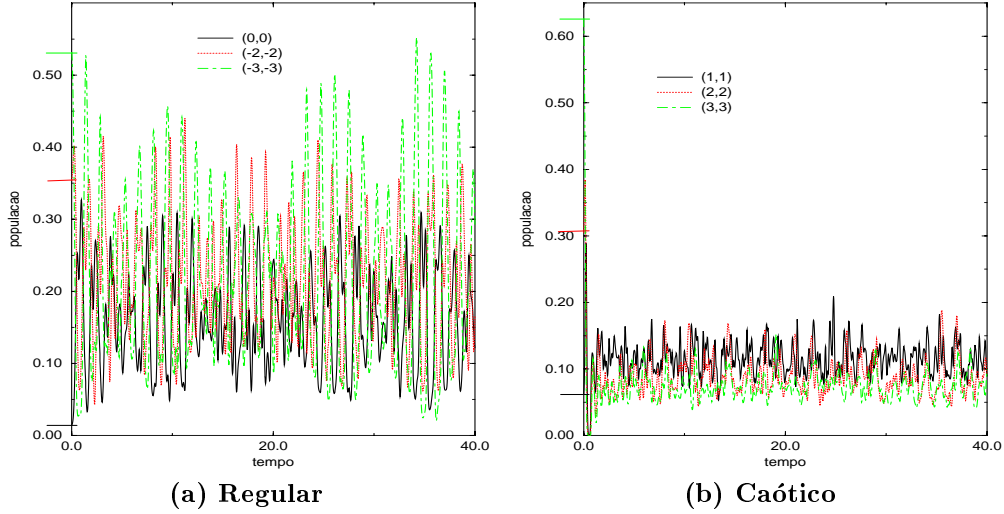


Figura 3.12: gráficos de três diferentes populações em função do tempo. Estamos considerando estados iniciais centrados em P_1 ((a)) e P_4 ((b)). Os traços no eixo vertical correspondem aos valores iniciais das populações

Caso D:

Utilizando os mesmos critérios, observamos a população e a coerência do sistema 2, que agora tem um tamanho de spin ($S_2 = 5$) maior que no caso **C** ($S_2 = 3$).

Obtemos então, o gráfico da figura 3.13, lembrando que estamos considerando a coerência que representa a probabilidade de transição entre os dois autoestados de S_{2z} mais populados.

Também observamos a evolução temporal três populações para cada estado inicial. As populações foram escolhidas usando os mesmos critérios utilizados no caso **C**. Obtemos assim as curvas apresentadas na figura 3.14

Devemos notar que as curvas correspondentes ao caso em que o pacote estava inicialmente centrado em regiões caóticas apresentam uma queda mais

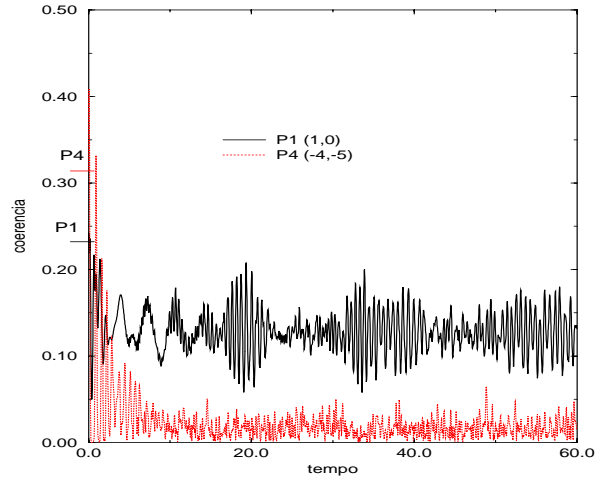


Figura 3.13: gráfico da coerência em função do tempo para estados iniciais inicialmente centrados em P_1 (Regular) e P_4 (Caótico). Está sendo considerado a coerência entre os dois estados da base inicialmente mais populados.

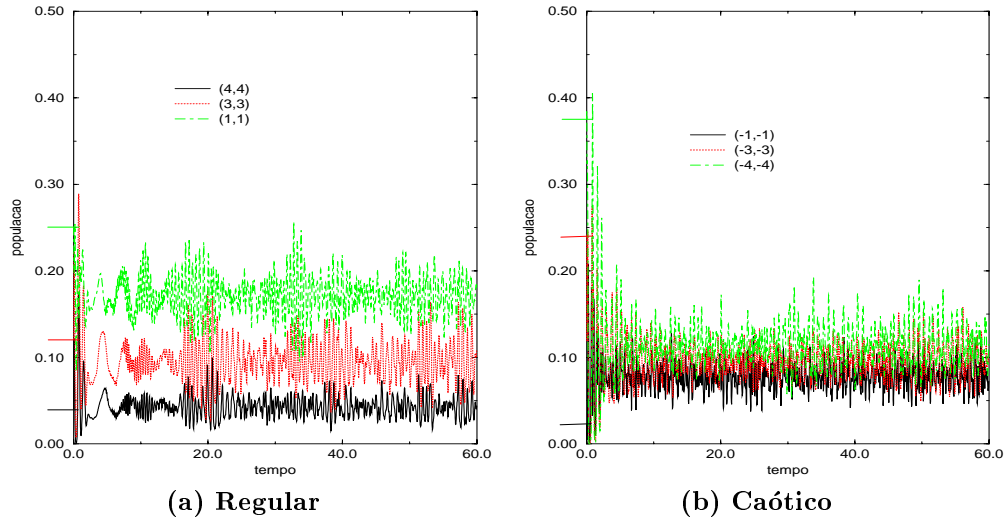


Figura 3.14: gráficos de três diferentes populações em função do tempo. Estamos considerando estados iniciais centrados em P_1 ((a)) e P_4 ((b)). Os traços no eixo vertical correspondem aos valores iniciais das populações

rápida, além de atingir em um valor limite menor do que as outras curvas (caso regular).

Além disso, para os pacotes inicialmente centrados na região de regime regular, as três populações tendem, em média, a permanecer em valores distintos. Mas, no caso do pacote centrado inicialmente na região caótica, as três populações atingem aproximadamente o mesmo valor, conforme observado em **i**).

3.3 Caso Integrável (Spins Iguais)

Vimos até agora o efeito de descoerência rápida em pacotes coerentes centrados inicialmente em regiões de regime caótico no espaço de fase clássico.

No entanto, também podemos observar este efeito em sistemas completamente integráveis no caso de pacotes centrados nas órbitas separatrizes do sistema clássico.

Como exemplo, tomemos o caso da interação de Heisenberg com anisotropia na direção z :

$$H = \left(\vec{S}_1 \vec{S}_2 + \sigma S_{1z} S_{2z} \right) \quad (S_1 = S_2), \quad (3.20)$$

que corresponde a (3.1) quando seus coeficientes assumem valores:

$$a_0 = 1; a_1 = 1; a_2 = 1 + \sigma; a_3 = 0 \quad (3.21)$$

Tomando estes valores na Hamiltoniana clássica dada em (2.55) obtemos:

$$\mathcal{H}(I_1, \phi_1, I_2, \phi_2) = \sqrt{(\hbar^2 S_1^2 - I_1^2)(\hbar^2 S_2^2 - I_2^2)} [\cos(\phi_2 - \phi_1)] + (1 + \sigma) I_1 I_2 \quad (3.22)$$

Mas devemos observar que para a Hamiltoniana dada em (3.1), a componente do spin total na direção z , $T_z = S_{1z} + S_{2z}$ é conservada (e o mesmo pode se dizer de seu correspondente clássico $I_1 + I_2$).

Desta forma é mais conveniente utilizarmos os pares de variáveis [23]:

$$\begin{aligned} m &= \frac{I_1 + I_2}{2\hbar S} & \phi &= \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \\ \eta &= \frac{I_2 - I_1}{2\hbar S} & \alpha &= \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

definidas no intervalo:

$$\begin{aligned} -1 \leq m \leq 1 & \quad , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ -1 \leq \eta \leq 1 & \quad , \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi \end{aligned} \quad (3.24)$$

Os pares (m, ϕ) e (η, α) satisfazem as equações de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m} & \dot{m} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \\ \dot{\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} & \dot{\eta} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (3.25)$$

quando o tempo é reescalado por um fator multiplicativo:

$$t' = \frac{t}{2\hbar S} \quad (3.26)$$

e \mathcal{H}_{Cl} definido da forma:

$$\mathcal{H}_{Cl} = \frac{\mathcal{H}}{\hbar^2 S^2} = \sqrt{1 - (m - \eta)^2} \sqrt{1 - (m + \eta)^2} \cos(2\alpha) + (\sigma + 1)(m^2 - \eta^2) \quad (3.27)$$

Observe que ϕ é uma variável cíclica, o que implica que m é uma constante de movimento. Como também temos a conservação de energia podemos concluir que as trajetórias do sistema clássico estão restritas à duas dimensões no espaço de fase (pois temos 4 variáveis e 2 constantes de movimento).

Com isso, o espaço de fase pode ser definido pelas variáveis α e η , cujas equações de movimento são dadas por (para $m=0$):

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= 2(1 - \eta^2) \sin 2\alpha \\ \dot{\alpha} &= -2\eta[1 + \sigma + \cos 2\alpha] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Apresentamos na figura 3.15 as órbitas periódicas correspondentes às equações acima para os casos em que $\sigma = -0.5$ e $\sigma = 0.5$, onde cada trajetória ocorre em diferentes energias.

Voltemos agora para o sistema quântico definido pelo Hamiltoniano (3.1), onde observamos a evolução temporal do defeito de idempotência nos casos em que $\sigma = -0.5$ e $\sigma = 0.5$. Consideramos dois spins de mesmo tamanho $S_1 = S_2 = \frac{9}{2}$.

Como estado inicial de utilizamos pacotes coerentes centrados nos pontos P_1 , P_2 e P_3 indicados nas figuras 3.15(a) e 3.15(b).

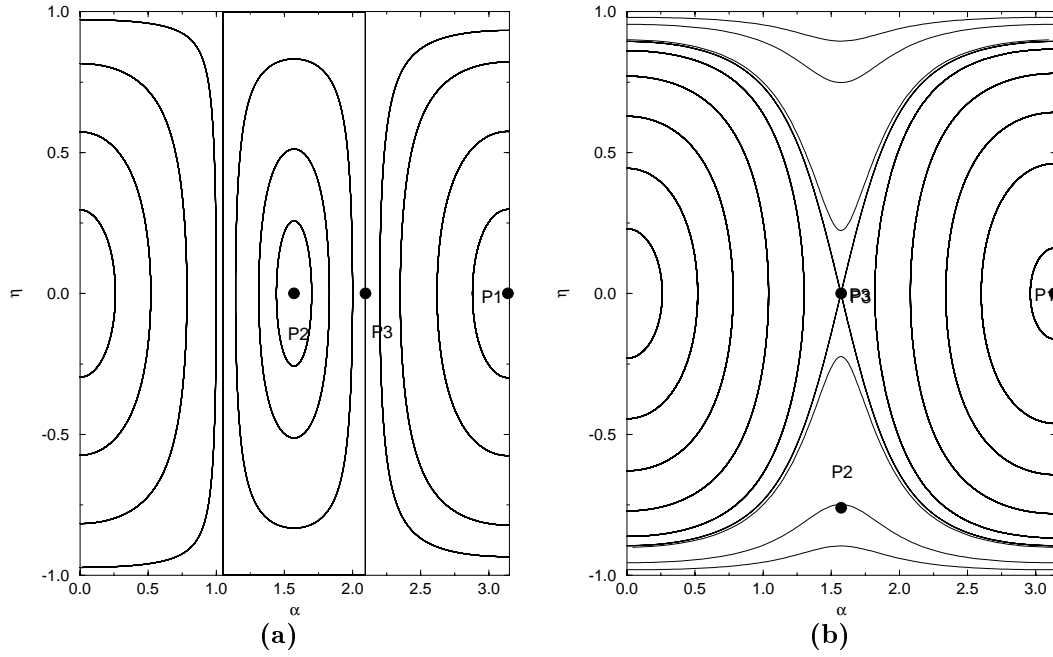


Figura 3.15: Órbitas Periódicas descritas pelo sistema clássico de dois spins quando : **(a)** $\sigma = -0.5$ e **(b)** $\sigma = 0.5$. Observe que, em ambos os casos, temos diferentes regimes de trajetórias que são separadas por uma órbita separatriz de período infinito.

Com isso obtemos os gráficos da figura 3.16. Podemos observar que nos estados iniciais centrados na separatriz do movimento no espaço de fase clássico (os pontos P_3 das figuras 3.16(a) e 3.16(b)) ocorre o efeito de descoerência rápida.

Notamos que, ao aproximarmos da separatriz, mesmo na região regular, a tendência é a descoerência ser mais rápida. Isto ocorre por que a órbita separatriz separa diferentes regimes de movimento do sistema clássico, pois para duas condições iniciais próximas da separatriz, mas em regimes de movimento diferentes, elas apresentam uma divergência análoga ao que ocorre em regiões caóticas.

Observe que as curvas correspondentes às condições iniciais regulares apresentam após atingir o patamar vários retornos a valores próximos de zero, indicando neste caso a tendência do subsistema de voltar a ser um estado puro.

Nos casos em que o pacote está centrado em ilhas regulares bem definidas (centrados em P_1), a curva chega a atingir o valor zero nestes retornos, o que significa que o estado do subsistema nestes instantes de tempo é um estado puro.

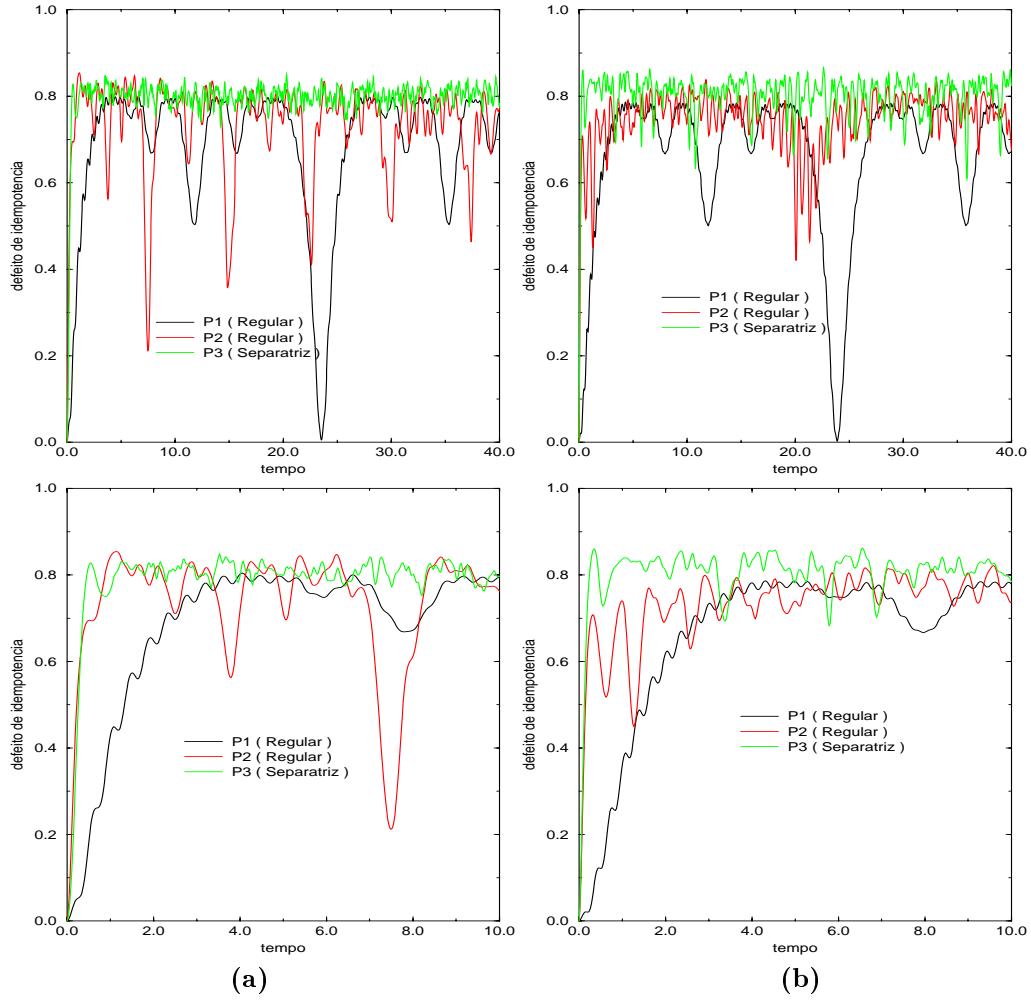


Figura 3.16: gráficos de $\delta(t) \times t$ para os estados iniciais centrados nos pontos indicados na figura 3.15. Para (a) $\sigma = -0.5$ e para (b) $\sigma = 0.5$. As curvas sólida, pontilhada e tracejada correspondem aos estados iniciais centrados nos pontos P_1 (reg.), P_2 (reg.) e P_3 (separatriz) respectivamente. Os gráficos inferiores correspondem a ampliações do início dos gráficos superiores.

Capítulo 4

Conclusões

Dentro do que foi visto no capítulo 3, podemos concluir que foi possível observar o fenômeno de descoerência rápida devido a caos para um sistema de dois spins. Desta forma, comprovamos a proposta feita por Zurek e Paz em um sistema formado por espaços de Hilbert finitos.

Além disso, também fomos capazes de observar outras características no comportamento da curva do defeito de idempotência que podem ser associadas à presença de caos no sistema clássico. Uma delas é a altura do patamar, onde observamos que as curvas para estados iniciais centrados em regiões caóticas têm um patamar mais elevado que o patamar das curvas do caso regular. A outra se refere à amplitude das flutuações da curva após atingir o patamar, que é menor para as curvas do caso caótico do que no regular.

Outro fator que favorece a descoerência rápida é o tamanho dos dois spins. Quanto maior o número de níveis de energia (ou maior a dimensão do espaço de estados) mais rápida será a perda de coerência do subsistema.

Isso também ocasiona o aumento no patamar que o defeito de idempotência atinge. Para espaço de estados de dimensão elevada este patamar tem a tendência de ser 1, que seria o máximo de emaranhamento que o sistema pode atingir.

Quando estudamos o sistema com tamanhos desiguais entre os dois spins, notamos que a dinâmica clássica é extremamente rica e variada. Isso nos permitiu, entre outras coisas, obter seções de Poincaré com regiões caóticas e regulares bem definidas, e com isso as diferenças apontadas acima entre os comportamentos nos dois casos (regular e caótico) ficaram mais evidentes.

Em particular, observamos no caso **C** (vide pag. 41), onde a separação

entre regiões caóticas e regulares é a mais definida, não foi observado sequer a formação de um patamar para pacotes inicialmente centrados em regiões regulares. Nestes casos, a curva apresentou diversos retornos a valores próximos de zero, apresentando uma tendência do subsistema de retornar a um estado puro, mantendo assim a coerência apesar da interação com o outro subsistema.

Além do defeito de idempotência, também foi observado o comportamento dos elementos de matriz do operador densidade reduzido ρ_2 referente ao menor dos spins.

Notamos que as populações para o caso caótico tendem, em média, ao mesmo valor; enquanto no caso regular tendem para médias diferentes. Como já foi citado no capítulo 3, esta diferença reflete a tendência do pacote centrado em regiões caóticas de se espalhar por toda a região caótica enquanto o pacote centrado em regiões regulares tenta manter sua forma restrita ao toro regular do espaço de fase.

Quanto às coerências temos que, para o caso regular elas nem sempre caem e podem se aproximar, em média, de valores diferentes de zero. Isto não ocorre para o caso caótico, onde as coerências sempre caem rapidamente em valores muito próximos de zero, tendendo a um estado de mistura estatística.

E por último, constatamos que no caso integrável também ocorre o fenômeno de descoerência rápida [24] quando consideramos pacotes centrados na órbita separatriz do sistema clássico. Isso ocorre pelo fato da órbita separatriz do sistema ser a separação de diferentes regimes de órbitas, e dá às suas proximidades características similares ao que é comumente associado a regiões caóticas: duas órbitas muito próximas uma de cada lado da separatriz se afastam muito rapidamente.

Apêndice

Apresentaremos neste apêndice como obtemos a distribuição de Husimi para nosso sistema de dois spins. Esta distribuição representa uma distribuição de probabilidade das funções de onda sobre o espaço de fase.

Foi a partir da distribuição de Husimi que definimos as larguras do pacotes coerentes que utilizamos como estados iniciais do sistema, que estão indicadas pelas linhas contínuas nas seções de Poincaré do capítulo 3.

A distribuição de Husimi para um sistema no estado $|\Psi\rangle$ é dada por:

$$h_{\Psi}(z) = \frac{|\langle z|\Psi\rangle|^2}{\langle z|z\rangle}, \quad (4.1)$$

onde $|z\rangle$ é um estado coerente.

Ou, no sistema de dois spins:

$$h_{\Psi}(z_1, z_2) = \frac{|\langle z_1 z_2|\Psi\rangle|^2}{\langle z_1 z_2|z_1 z_2\rangle}. \quad (4.2)$$

Estamos interessados apenas em observar esta distribuição no instante inicial. Como escolhemos como estado inicial do sistema estados coerentes do tipo $|z'_1 z'_2\rangle$, a distribuição de Husimi para o instante inicial do sistema é dado por:

$$h_{z'_1, z'_2}(z_1, z_2) = \frac{|\langle z_1 z_2|z'_1, z'_2\rangle|^2}{\langle z_1 z_2|z_1 z_2\rangle} = \left(\frac{1 + z_1 \bar{z}'_1}{1 + |z_1|^2}\right)^{2S_1} \left(\frac{1 + z_2 \bar{z}'_2}{1 + |z_2|^2}\right)^{2S_2} \quad (4.3)$$

Mas nos pares de variáveis intensivas (K_l, ϕ_l) , esta distribuição toma a forma abaixo:

$$h(K_1, \phi_1, K_2, \phi_2) = \prod_{l=1}^2 \frac{1}{2^{2S_l}} \left[(1 - K'_l) + \frac{1+K_l}{1-K_l} \sqrt{1 - (K'_l)^2} \cos(\phi_l - \phi'_l) + \left(\frac{1+K'_l}{1-K'_l}\right) (1 + K'_l) \right]^{2S_l} \quad (4.4)$$

Como desejamos observar esta distribuição na seção definida pelas variáveis (K_2, ϕ_2) , projetamos esta distribuição sobre o plano da seção, onde obtemos:

$$P(K_2, \phi_2) = \int dK_1 d\phi_1 h(K_1, \phi_1, K_2, \phi_2) = \frac{1}{2^{2S_2}} \left[(1 - K'_2) + \frac{1+K_2}{1-K'_2} \sqrt{1 - (K'_2)^2} \cos(\phi_2 - \phi'_2) + \left(\frac{1+K'_2}{1-K'_2} \right) (1 + K'_2) \right]^{2S_2} \quad (4.5)$$

As linhas contínuas nas seções de Poincaré representam a largura desta distribuição a meia altura para os pacotes coerentes utilizados como estados iniciais.

Bibliografia

- [1] O.Bohigas, D.Boosé and V.Marvulle, *Quantum Tunneling and Chaotic Dynamics*, Nuclear Physics **A560**, 197 (1993).
- [2] D.A.Steck, W.H.Oskay, M.G.Raizen, *Observation of Chaos-Assisted Tunneling Between Islands of Stability*, Science, **Vol. 293**, 274 (2001).
- [3] M.V.Berry and M.Tabor, *Level Clustering in the Regular Spectrum*, Proc. R. Soc. Lond **A356**, 375 (1977).
- [4] O.Bohigas, M.J.Giannoni and C.Schmit, *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Flutuations Laws*, Phys.Rev.Lett. **52**, 1 (1984).
- [5] O.Bohigas, M.J.Giannoni and C.Schmit, *Spectral Properties of the Laplacian and Random Matrix Theories*, J.Physique Lett. **45**, L-1015 (1984).
- [6] W.H.Zurek e J.P.Paz, *Quantum Chaos: a decoherent definition*, Physica **D83**, 300 (1995).
- [7] K.Furuya, G.Q. Pellegrino e M.C.Nemes, *Quantum Dynamical Manifestation of Chaotic Behavior in the Process of Entanglement*, Phys. Rev. Lett. **80**, 5524 (1998).
- [8] A.J. Leggett, S.Chakravarty, A.T. Dorsey, M.P.A. Fisher, A. Garg and W. Zwegger, *Dynamic of the Dissipative Two-State System*, Rev. Mod. Phys. **59** 1 (1987); A.O. Caldeira and A.J.Leggett, *Influence of Damping on Quantum Interference: An Exactly Soluble Model*, Phys. Rev. **A31** 1059 (1985).
- [9] J. Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1955.

- [10] F. K. Nohama, *Emaranhamento e Caos no Regime Semiclássico para Sistema de Spins Acoplados*, 1º relatório enviado para a FAPESP, Fevereiro de 2001.
- [11] M. Feingold and A. Peres, *Regular and Chaotic Motion of Coupled Rotators*, Phys. D **9**(1983) 433.
- [12] A. Peres, *New Conserved Quantities and Test for Regular Spectra*, Phys. Rev. Lett. **53**, 1711 (1984); M. Feingold, N. Moiseyev and A. Peres, *Ergodicity and Mixing in Quantum Theory II*, Phys. Rev. **A30**, 509 (1984).
- [13] W. H. Zurek, *Pointer Basis of Quantum Apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse*, Phys. Rev. **D24**, 1516 (1981).
- [14] A. Steane, *Quantum Computing*, Rep. Prog. Phys. **61**, 117 (1998); W. G. Unruh, *Maintaining Coherence in Quantum Computers*, Phys. Rev. **A51**, 992 (1995)
- [15] Kerson Huang, *Statistical Mechanics*, Cap. 8 2ª ed. 1987, John Wiley & Sons, New York.
- [16] W. H. Zurek, *Coherent States via Decoherence*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1187 (1993).
- [17] M. E. Fisher, *Magnetism in the One Dimensional Systems - The Heisenberg Model for Infinite Spins*, Am. J. Phys. **32**, 343 (1964).
- [18] E. H. Lieb, *The Classical Limit of Quantum Spins Systems*, Commun. Math. Phys. **31**, 327 (1973).
- [19] P. Kramer e M. Saraceno; *Geometry of the Time-Dependent Variational Principle in Quantum Mechanics*, Lectures Notes in Physics 140 (Springer-Verlag, New York, 1981).
- [20] J. R. Klauder e B.-S. Skagerstam; *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore (1985).
- [21] G. Q. Pellegrino, *Aspectos de Integrabilidade e Caos Relacionados a Quebra de Simetria em modelos de Poucos Spins*, Tese de Doutorado, Unicamp, 1994.

- [22] G.Q. Pellegrino, R.M. Angelo, K.Furuya and M.C. Nemes, preprint (2002).
- [23] G.Q. Pellegrino, K.Furuya and M.C. Nemes, *Quantal and Classical Manifestation of Symmetry Breaking in the Integrable Two-Spin System*, Chaos Solitons e Fractals 3, 327 (1997).
- [24] R.M. Angelo, K.Furuya, M.C. Nemes and G.Q. Pellegrino, *Rapid decoherence in integrable systems: a border effect*, Phys. Rev **E60**, 5407 (1999).